



## Física del caos

# 5

CARLOS SANTOS BURGUETE

*Centro Nacional de Predicción (CNP), Agencia Estatal de Meteorología (AEMET)*

JUAN PABLO SIMARRO GRANDE

*Delegación territorial (DT) en Valencia, AEMET*

DAVID FUERTES MARRÓN

*Instituto de Energía Solar, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones (ETSIT), Universidad Politécnica de Madrid (UPM)*

If we knew exactly the laws of nature and the situation of the universe at the initial moment, we could predict exactly the situation of that same universe at a succeeding moment. but even if it were the case that the natural laws had no longer any secret for us, we could still only know the initial situation approximately. If that enabled us to predict the succeeding situation with the same approximation, that is all we require, and we should say that the phenomenon had been predicted, that it is governed by laws. But it is not always so; it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible, and we have the fortuitous phenomenon.

*Science and method, 1903 – HENRI POINCARÉ*

¿Qué es la física del caos? Anteriormente hemos encuadrado esta teoría dentro de los grandes paradigmas en la historia de la ciencia. En este capítulo nos adentramos en sus fundamentos. Dentro de los llamados sistemas dinámicos, veremos qué relación hay entre lo que se llama *sensibilidad a las condiciones iniciales* y la posibilidad de predecir el futuro de un sistema o *predecibilidad*. Enlazando con las ideas inherentes a la teoría del caos desde el punto de vista científico llegaremos, por fin, al *efecto mariposa*. Más tarde abordaremos las ideas más relevantes de la teoría para la predicción meteorológica.

**Palabras clave:** física del caos, sistemas dinámicos, sensibilidad a las condiciones iniciales, sensibilidad a los parámetros del modelo, efecto mariposa.

---

Imagen parte superior: Yunque “masivo” de un *Cumulonimbus* (supercélula), Parque Juan Carlos I (Madrid), hacia el este, 7 de septiembre de 2004 a las 19:40. Fotografía de JOSÉ ANTONIO QUIRANTES CALVO.

## 5.1 Sistemas dinámicos

Los *sistemas dinámicos* son modelos matemáticos que explican sistemas cuyo estado va cambiando con el tiempo. En *física matemática* hay toda una rama que estudia estos sistemas, que se aplican también con éxito en ecología, economía o cualquier disciplina en la que se puedan cuantificar los elementos, límites y relaciones del sistema de interés y, por tanto, explicarlos con herramientas matemáticas. Por ejemplo, podríamos utilizar un sistema dinámico para explicar el movimiento de un péndulo, de una noria o de un coche; pero podríamos también utilizar sistemas dinámicos para explicar la evolución de una población de conejos en un ecosistema, la volatilidad en la bolsa durante unos días o el número de usuarios de un portal web en función de algunas innovaciones en el mismo.

Atendiendo a ciertas propiedades matemáticas del sistema dinámico distinguiremos, por un lado, entre sistemas discretos y continuos.

**Sistemas dinámicos discretos y continuos.** Desde el punto de vista matemático [4], la evolución de algunos sistemas dinámicos puede describirse dando pequeños saltos en el tiempo y entonces hablamos de sistemas dinámicos *discretos*. Se trabajan matemáticamente con ecuaciones *recursivas* o *iteraciones*:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (5.1)$$

donde  $x$  representa el estado del sistema,  $k$  es el momento discreto en el tiempo, y  $f$  es una función de  $x$ . Estas relaciones permiten expresar el estado del sistema en el instante  $k+1$  como función de su estado inmediatamente anterior  $k$ . Si el sistema, por el contrario, puede caracterizarse mediante la evolución en el tiempo de forma continua, entonces se denominan sistemas dinámicos *continuos* y se representan matemáticamente con ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.2)$$

donde ahora  $t$  es el tiempo.

Como veremos más tarde, las condiciones iniciales de los sistemas están directamente relacionadas con las constantes de integración de estas ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, distinguiremos aquellos sistemas que son *lineales* de aquellos que son *no lineales* y, por

último, identificaremos aquellos que son *no lineales* y *caóticos*. Como veremos, los sistemas dinámicos no lineales ostentan dos características cruciales: la sensibilidad a las condiciones iniciales y la limitación en la predecibilidad de su comportamiento futuro.

### 5.1.1 Sistemas dinámicos discretos

En los sistemas dinámicos *discretos*, como se señalaba anteriormente, se trabaja matemáticamente con ecuaciones *recursivas* o *iteraciones*.

Un ejemplo conocido es la llamada *ecuación logística*:

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k) \quad (5.3)$$

donde  $x$  es la variable dinámica y el subíndice  $k$  denota los pasos de tiempo. Esta ecuación puede utilizarse para modelizar dinámica de poblaciones en algunos ecosistemas. En ese contexto,  $x$  sería, por ejemplo, una población de conejos en ausencia de depredadores,  $a$  representaría una cantidad de alimento fija disponible anualmente y  $k$  sería el número de años. El sistema dinámico así definido es sensible a las condiciones iniciales  $x_0$  y al parámetro del modelo  $a$ . Haciendo variar el parámetro  $a$ , el sistema puede evolucionar hacia *puntos fijos* o hacia estructuras mucho más complejas, incluyendo *bifurcaciones* [1].

La representación gráfica de las soluciones de la ecuación logística conduce a hermosas figuras llamadas diagramas de bifurcación, e.g. Figura 5.1.

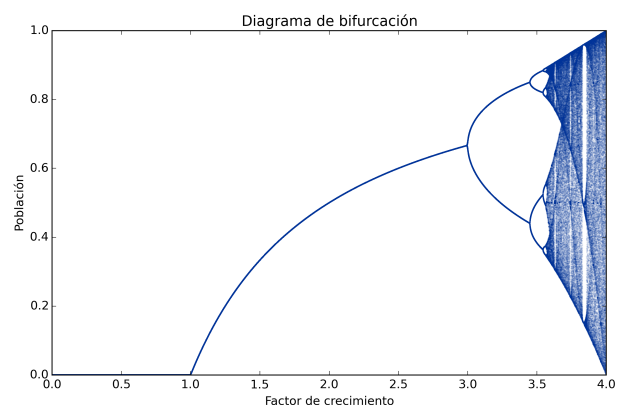


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación para la ecuación logística haciendo variar el parámetro  $a$  descrito en el texto.

### 5.1.2 Sistemas dinámicos continuos

¿Cómo describimos la evolución de los sistemas dinámicos en física? La invención del cálculo diferencial por NEWTON y LEIBNIZ para este propósito fue determinante en el desarrollo posterior de esta ciencia en todos sus campos. En el caso concreto de la mecánica, el cálculo nos permite relacionar entre sí las variables que gobiernan el comportamiento de los sistemas: su *posición*, *velocidad* y *aceleración*. Las relaciones particulares que se establezcan entre dichas variables recogerán la física del sistema. Por ejemplo, una carga eléctrica describirá una trayectoria en presencia de un campo eléctrico distinta a la que seguiría en presencia de un campo magnético. Cada tipo de campo ejercerá una fuerza característica sobre la carga y le impartirá una aceleración distinta en magnitud y dirección, lo que determinará la posición de la partícula en un instante de tiempo posterior. Matemáticamente las relaciones entre posición, velocidad y aceleración se expresan mediante ecuaciones diferenciales. Éstas pueden ser ordinarias o parciales, dependiendo de la existencia de una o más variables de las que dependa cada magnitud.

**Velocidad, aceleración y trayectoria.** Por ejemplo, la velocidad de una partícula obligada a moverse en una dirección se define como el cambio de su posición en función del tiempo mediante la ecuación diferencial ordinaria:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (5.4)$$

De manera similar, su aceleración se define como el cambio de velocidad en función del tiempo que, a su vez, podemos expresar también en función del cambio de posición utilizando la ecuación anterior:

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (5.5)$$

La trayectoria de la partícula vendrá determinada tras la integración de las ecuaciones diferenciales anteriores, es decir, una vez que consigamos eliminar en las mismas aquellos términos que incluyan las derivadas temporales. De esta manera podremos expresar la posición, por ejemplo, como función del tiempo:

$$x(t) = f(t) \quad (5.6)$$

En el ejemplo anterior, la trayectoria  $f_1(t)$  de la carga eléctrica en presencia de un campo magnético será diferente de la trayectoria  $f_2(t)$  que seguirá la misma carga bajo un campo eléctrico.

Las ecuaciones dinámicas integradas, algebraicas, nos permiten manejar el tiempo directamente como variable y no solamente a través de su efecto sobre la tasa de cambio de las magnitudes de interés, como en el caso de las ecuaciones diferenciales.

Ambas expresiones deben contener la misma información para que sean intercambiables: unas resultan más cómodas para describir la física del problema que tratamos de resolver mientras que las otras nos permiten visualizar más fácilmente las trayectorias de los sistemas estudiados. Pero esencialmente se trata de dos maneras equivalentes de decir lo mismo. Dicha equivalencia se traduce en que si derivamos con respecto al tiempo la solución integrada obtenida a partir de la ecuación diferencial (es decir, deshacemos la integración), recuperaremos de nuevo la ecuación diferencial original.

Sin embargo existe una cierta asimetría entre los procesos de integración y diferenciación. El paso de una expresión diferencial a otra algebraica mediante la integración introduce términos adicionales, antes ausentes en las expresiones. Dichos términos no son arbitrarios sino que deben escogerse de manera que el camino inverso, es decir, la diferenciación de la expresión integrada, resulte en la expresión diferencial original y, por tanto, desaparezcan. Estas características funcionales de los términos entrantes y salientes implican que dichos términos deben ser independientes de la variable con respecto a la que derivamos e integramos, el tiempo. Es decir, son constantes. Dichas constantes de integración son los grados de libertad que nos permiten fijar las condiciones iniciales de nuestro problema. La integración de la ecuación 5.4, por ejemplo, nos permitirá fijar una posición inicial de nuestra partícula (que no necesariamente coincidirá con el origen de coordenadas que utilizemos), mientras que la integración de la ecuación 5.5 nos permitirá fijar la velocidad inicial con la que se desplazaba la partícula antes de sufrir el efecto del campo eléctrico o magnético.

La dinámica de los sistemas, de acuerdo con la *segunda ley de NEWTON*, relaciona las fuerzas que gobiernan su evolución con su aceleración.



### 5.1.3 El péndulo simple



Figura 5.2: Péndulo simple

Imaginemos una representación sencilla del péndulo de un reloj de pared como el de la Figura 5.2, consistente en una barra rígida fijada en el punto superior de la misma y una pesa (disco verde de la figura) en

el extremo libre inferior. En física este sistema se denomina *péndulo simple*.

Para visualizar el movimiento del péndulo imaginamos una cámara fotográfica con la que registraríamos la posición de la pesa en distintos instantes de tiempo, como se ilustra en la simulación numérica de la Figura 5.3, entre el instante inicial ( $t=0$ ) y 4,25 segundos más tarde ( $t=4,25$ ). La estela de cada fotograma brinda efecto de animación a la simulación.

El péndulo simple arranca colocando el disco en alguna posición separada de la vertical y soltándola sin aplicarle impulso. El disco caerá hacia el centro, y remontará vuelo hacia el otro lado, como péndulo que

es. Oscilará de este modo entre uno y otro lado. Un péndulo real siempre está amortiguado, por estar rodeado de aire y por tanto sujeto a fricción (*disipación de energía*), de modo que irá perdiendo en cada oscilación un poco de amplitud hasta que por fin, después de muchas oscilaciones cada vez más pequeñas, se parará en el centro. En el péndulo simple simulado se ha eliminado esta característica de la fricción y podría estar oscilando eternamente.

¿Por qué un sistema como el péndulo simple evoluciona con el tiempo? La respuesta es que la fuerza de atracción gravitatoria terrestre imprime una aceleración a la masa que hará que ésta se desplace. Lo anterior quiere decir que para averiguar la trayectoria seguida por la masa del péndulo deberemos resolver una ecuación diferencial como la ecuación 5.5 en la [página anterior](#), que incluye la aceleración, en cuya solución aparecerán dos constantes de integración, tantas como las veces que tengamos que derivar la expresión algebraica integrada para recuperar la ecuación diferencial original. Las constantes de integración de la ecuación 5.5 en la [página anterior](#) corresponden, como se dijo antes, a las condiciones iniciales que describen la posición y la velocidad de la partícula en el instante en el que empezamos a estudiar su comportamiento.

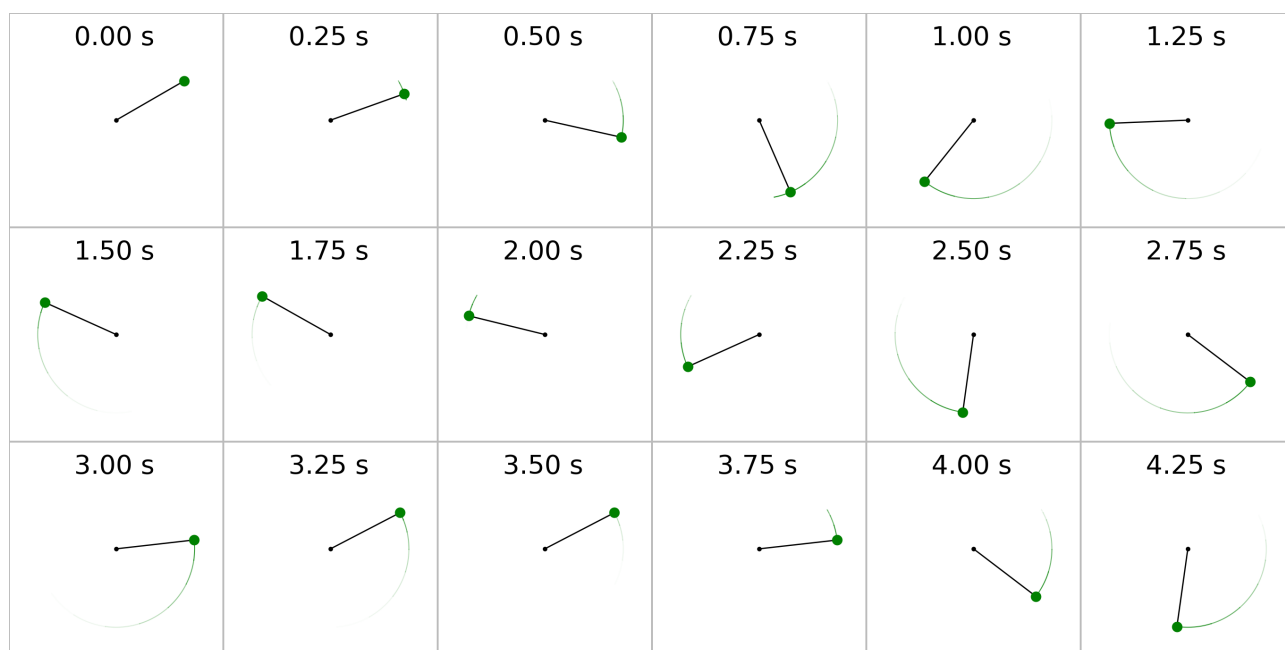


Figura 5.3: Simulación numérica del movimiento de un péndulo simple



### 5.1.4 Diagrama de fases

Una manera práctica de describir la evolución de un sistema como el péndulo simple consiste en hacer un mapa con los valores de los parámetros involucrados en la evolución del sistema. ¿Qué valores de posición y velocidad puede tomar la masa de un péndulo simple en acción? Evidentemente no cualesquiera, sino únicamente aquellos que sean compatibles con su dinámica. Ese mapa de valores posibles de los parámetros del sistema se conoce como *diagrama de fases*. En el caso del péndulo simple, el diagrama de fases representa parejas de valores de posición y velocidad de la masa del péndulo en cada instante de tiempo. De esta forma, cada punto en el diagrama corresponde a la fotografía del sistema en un cierto instante de tiempo, caracterizado por que la masa del péndulo se encuentra en una determinada posición viajando a una cierta velocidad. La siguiente figura representa el diagrama de fases de un péndulo simple (ver Figura 5.4) con una familia de trayectorias posibles. La elección de una curva particular de la familia de curvas posibles viene impuesta por las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, si desplazamos la masa del péndulo una distancia  $x_1$  y la liberamos en el instante  $t = 0$ , de manera que  $v = 0$ , el punto indicado en el diagrama con coordenadas  $(x_1, 0)$  será el fotograma de nuestro sistema en el instante inicial.

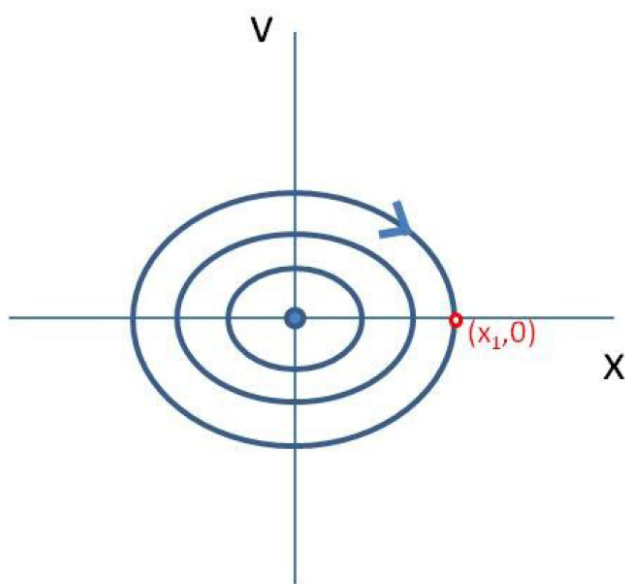


Figura 5.4: Diagrama de fases de un péndulo simple

La evolución del sistema estará determinada a partir de ese instante por los puntos comprendidos en la curva correspondiente. Si, por ejemplo, asignamos

valores positivos de velocidad cuando la masa se desplaza de izquierda a derecha y negativos cuando lo hace de derecha a izquierda, tendremos además definido el sentido de la trayectoria de nuestro sistema en el espacio de fases. Podemos predecir también qué ocurriría con nuestro sistema si desplazáramos la masa del péndulo un poco más allá de  $x_1$  en el instante inicial: la nueva trayectoria elíptica será entonces un poco más amplia, de manera que el valor máximo de la velocidad que alcanza la masa en su movimiento pendular al pasar por el punto de equilibrio ( $x = 0$ ) será algo mayor también. Si el incremento en la posición original es arbitrariamente pequeño, también lo será el incremento correspondiente de velocidad máxima y las trayectorias correspondientes estarán arbitrariamente cerca la una de la otra. Decimos pues que se trata de un sistema determinista.

Los diagramas de fases permiten identificar rápidamente propiedades importantes de la evolución de los sistemas dinámicos. Por ejemplo, si las trayectorias son cerradas nuestro sistema describirá un movimiento periódico, es decir, parejas de valores de posición y velocidad se repetirán periódicamente con el paso del tiempo. Si, por el contrario, las trayectorias en el diagrama de fases son abiertas, el movimiento del sistema será aperiódico. Existen situaciones en las que las trayectorias tienden a converger en un punto del diagrama de fases al que, en un lapso de tiempo suficientemente largo, el sistema terminará aproximándose arbitrariamente cerca. Estos puntos particulares se conocen como *atractores* y se asocian a situaciones de equilibrio al que determinados sistemas evolucionan de manera natural. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo amortiguado termina por detenerse en su posición de equilibrio. En este caso, las trayectorias del espacio de fases son espirales que convergen hacia el origen  $(0,0)$ , el *atractor* de este sistema. El equilibrio termodinámico al que convergen los sistemas estudiados por la termodinámica puede considerarse también un atractor del espacio de fases de los parámetros termodinámicos correspondientes de dichos sistemas.

Existen igualmente sistemas inestables, caracterizados por la divergencia de sus trayectorias en sus diagramas de fases. La evolución temporal de la trayectoria asociada a un atractor, considerando que el tiempo avanza hacia el pasado en lugar de hacerlo hacia el futuro, describe un ejemplo de esta situación, en la que a partir de un punto del diagrama de fases la evolución temporal «rebobinada» nos distanciara arbitrariamente lejos de esas condiciones iniciales. Generalizando

esta última idea, existe una fuerte conexión entre las simetrías de un sistema y la conservación de ciertas cantidades importantes en física, e.g. la cantidad de movimiento, el momento angular o la energía. La matemática EMMY NÖETHER demostró esta conexión formulando el que probablemente sea el teorema más profundo de la física matemática: el teorema de NÖETHER.

**Teorema de NÖETHER.** Toda simetría diferenciable, en términos de la acción, en un sistema dinámico tiene una ley de conservación correspondiente [6, 10]. La acción es una integral en el tiempo de una función lagrangiana y permite determinar el comportamiento del sistema por el principio de mínima acción. En particular, si el sistema es invariante bajo traslaciones se conserva la cantidad de movimiento. Si lo es bajo rotaciones, se conserva el momento angular. Y si no varía en el tiempo, se conserva la energía.

Finalmente, el teorema de LIOUVILLE es un resultado de la mecánica *hamiltoniana*, una variedad avanzada de la mecánica *newtoniana*, sobre la evolución temporal de un sistema mecánico a través de su diagrama de fases. Supone también una pieza clave para la teoría del caos.

**Teorema de LIOUVILLE.** Un conjunto de partículas con condiciones iniciales cercanas puede representarse por la región conexas que ocupa en el llamado *espacio de fases*, espacio de estados posibles de un sistema [2]. El teorema establece que dicha región mantendrá invariante su volumen a pesar de que se estirará y se encogerá a medida que cada partícula evolucione.

Los diagramas de fases revelan propiedades importantes de los sistemas dinámicos, como su estabilidad o inestabilidad o bien su periodicidad o aperiodicidad. La Figura 5.5 muestra un resumen de posibles trayectorias en el diagrama de fases de algunos sistemas dinámicos, caracterizados por su posición y velocidad o, más generalmente, descritas por coordenadas y momentos generalizados,  $q$  y  $p$ . Se pueden observar trayectorias cerradas, asociadas a movimientos periódicos; abiertas, correspondientes a movimientos no periódicos; estables, permaneciendo sus trayectorias en regiones limitadas del diagrama de fases; o

inestables, en cuya evolución el sistema ocupará regiones del diagrama arbitrariamente distantes de su posición inicial. El concepto de diagrama de fases se puede generalizar a otro tipo de sistemas caracterizados por parámetros distintos a la posición y la velocidad. Podemos aplicarlo a sistemas termodinámicos, caracterizados por su temperatura y presión, o bien definir combinaciones de parámetros de distinto tipo, dinámicos y termodinámicos, por ejemplo, para estudiar sistemas más complejos, como es el caso de la atmósfera.

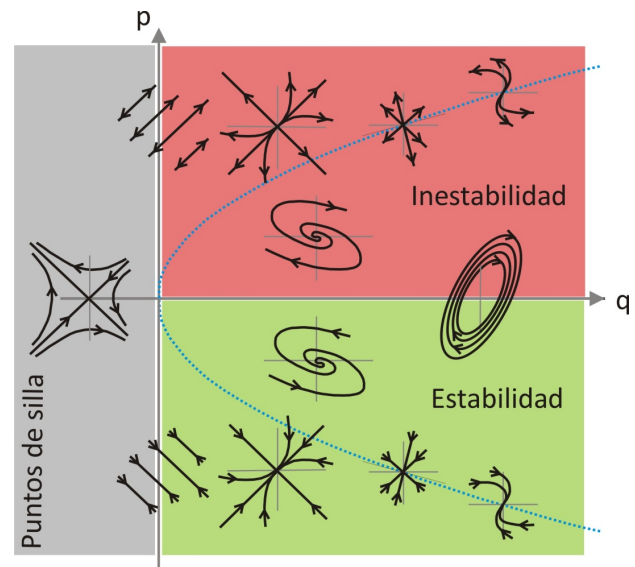


Figura 5.5: Posibles trayectorias en el diagrama de fases de algunos sistemas dinámicos (inspirada en Simmons [13]).

### 5.1.5 Sistemas dinámicos lineales, no lineales y caóticos

En los sistemas lineales, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conducen a diferencias también pequeñas en el estado final después de la evolución. Sin embargo, en los sistemas no lineales, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden conducir a grandes diferencias en el estado final después de la evolución, como puede verse en los ejemplos de este capítulo. Este último fenómeno, ilustrado en la Figura 5.6 en la página siguiente, es absolutamente crucial para la predicción del futuro del sistema y se llama *sensibilidad a las condiciones iniciales*. La diferencia entre dos estados iniciales del sistema, a menudo llamada *incertidumbre* o *error* por estar asociada a la máxima precisión con la que podemos identificar dichos estados de manera diferenciada, se mantiene en los sistemas lineales cuando estos evolucionan en el tiempo. En los sistemas no lineales, la incertidumbre

puede crecer con el tiempo, aunque también podría permanecer constante o reducirse.

**Sistemas dinámicos lineales, no lineales y caóticos.** Siguiendo la notación de las ecuaciones anteriores, cuando  $f$  es una función lineal de  $x$ , es decir, si se cumple que:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (5.7)$$

entonces el sistema dinámico descrito por  $f$  se dice que es *lineal*. De lo contrario, se dice que es *no lineal*. Cuando el sistema dinámico es lineal, se cumple el *principio de superposición* para las soluciones, se pueden separar las distintas variables aplicando la ecuación 5.7 y, sobre todo, tiene *solución analítica*, es decir, una expresión explícita de  $x$  en función del tiempo  $x(t)$ . Por el contrario, cuando el sistema es no lineal no existe tal solución analítica. Si, además de no ser lineal, el sistema muestra una propiedad llamada *mezclado topológico* (que veremos más adelante), entonces el sistema es *caótico*.

nes correspondientes, linealizándolas, de modo que puedan tener solución analítica.

**Linealización de sistemas dinámicos.** Un sistema dinámico general con vector de estado  $x$ , es decir, conjunto de valores que adquieren las variables en un mismo instante, lo representamos [4] con la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

donde estamos usando la notación de Newton para la derivada temporal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (5.9)$$

Ahora, con ciertas condiciones, e.g. un rango de valores pequeños para  $x$ , denotado  $|x| \ll$ , puede suponerse que la función  $\mathbf{f}$  es aproximadamente lineal, i.e.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \sim \mathbf{A}\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{A}$  es un operador lineal, representado mediante una matriz con coeficientes constantes. En ese caso el sistema tiene siempre solución analítica:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.10)$$

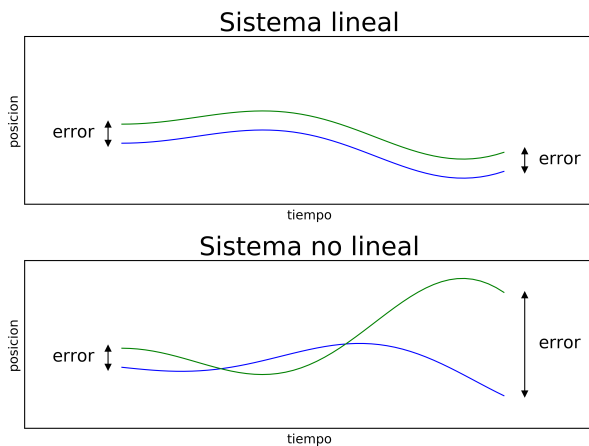


Figura 5.6: Comportamiento frente a variaciones en las condiciones iniciales en un sistema lineal y en otro no lineal.

### 5.1.6 Linealización

En la historia de las ciencias con soporte matemático se ha resuelto una enorme variedad de problemas mediante la técnica de aproximación denominada *linealización*: si el sistema dinámico que representa matemáticamente nuestro problema no tiene solución analítica porque no es lineal, podemos encontrar a menudo un *conjunto de estados* (unas circunstancias concretas) en los que el sistema puede considerarse aproximadamente lineal; se simplifican las ecuacio-

**Oscilador armónico.** Se trata de un sistema dinámico muy utilizado, con forma general:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \Omega \mathbf{x} \quad (5.11)$$

donde  $\Omega$  es una matriz que contiene las frecuencias del sistema. En el caso unidimensional (1D) queda reducido a:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (5.12)$$

que se ajusta a la ecuación general 5.8 cambiando de variable:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \end{aligned} \quad (5.13)$$

A su vez, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

cuya solución nos da la amplitud de oscilación  $x$  en función del tiempo  $t$ .

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (5.15)$$

El *oscilador armónico* es un sistema dinámico de gran importancia porque a él se ajustan aproximadamente muchas pautas en la naturaleza y podemos estudiarlo con una ecuación diferencial prototipo, lineal, sencilla y con solución analítica. Por ejemplo, el péndulo



simple puede describirse con estas ecuaciones.

Grandes teorías y técnicas de considerable éxito contienen ecuaciones linealizadas en física, química, economía, biología, ingeniería, etc. Por ejemplo, en el caso del oscilador armónico o del péndulo simple, se asume a menudo que las amplitudes de las oscilaciones son pequeñas, lo que permite linealizar el problema. Ocurre lo mismo en *electromagnetismo*, *magnetohidrodinámica*, dinámica de fluidos en regímenes *laminares*, soluciones particulares de la *relatividad*, *cosmología*, etc.

## 5.2 Sensibilidad a las condiciones iniciales

Como decíamos anteriormente, en los sistemas dinámicos no lineales pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden conducir a grandes diferencias en el estado final después de la evolución del sistema. Este último fenómeno crucial se denomina *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Para ilustrarlo convenientemente, tomemos para empezar un ejemplo muy

sencillo de sistema dinámico no lineal: el *péndulo doble*.

### 5.2.1 El péndulo doble



Figura 5.7: Péndulo doble

Podemos construir un péndulo doble a partir del péndulo simple de la sección anterior añadiendo a la primera masa (disco rojo de la Figura 5.7) una segunda barra con su masa correspondiente en el extremo libre (disco verde). El péndulo simple y el péndulo doble son sistemas dinámicos aparentemente inocentes por

su sencillez, pero en su evolución está escondida la clave de la *impredecibilidad* básica en la Naturaleza: la sensibilidad a las condiciones iniciales.

La Figura 5.8 muestra el movimiento de un péndulo doble mediante una simulación, de la que mostramos la posición del péndulo cada cuarto de segundo.

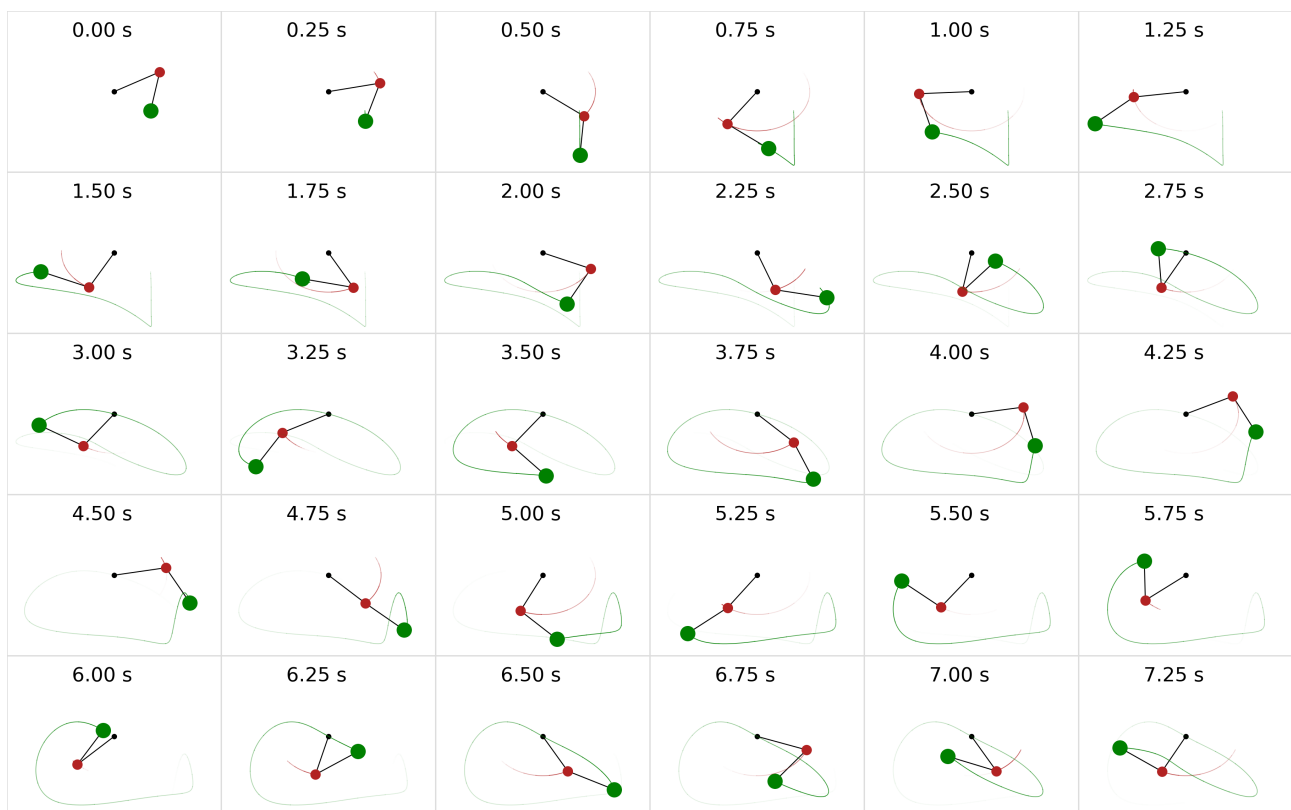


Figura 5.8: Simulación del movimiento de un péndulo doble

El disco rojo está colgado de la pared mediante una varilla negra, como si la varilla fuera la manecilla de un reloj. A su vez, el disco verde está colgado del rojo por otra varilla negra, como una manecilla de reloj enganchada a la primera manecilla. Podemos imaginar que en 0,00 segundos un amigo invisible está levantando el disco verde hasta esa posición y lo suelta. Los discos y manecillas van cayendo, en 0,50 s el verde está en una posición inferior, en 0,75 s el rojo lo ha adelantado, remontando hacia la parte izquierda. En 1,00 s el rojo alcanza la parte superior de nuevo, mientras que el verde no llega, como puede verse en 1,25 s. En 2,50 s y 2,75 s podemos ver al disco verde dar la vuelta por arriba, cosa que no ocurriría en el péndulo simple. Esta película en formato cómic nos permite imaginar el movimiento de este péndulo doble.

Nos interesa entender la sensibilidad a las condiciones iniciales. Imaginemos ahora dos péndulos dobles, uno al lado del otro. Imaginemos también que vamos a hacerlos moverse, colocando el disco inferior de cada uno de ellos en una posición algo más elevada que en el caso anterior, soltándolos y observando lo que sucede (Figura 5.10 en la página siguiente). En esta figura se han dibujado los péndulos dobles con tonos de color distintos, para poder distinguir mejor a cada péndulo doble y las viñetas se siguen en vertical.

Si las *condiciones iniciales*, es decir, las posiciones de los discos inferiores en el instante inicial son idénticas entonces su evolución también lo será. Pero, ¿cómo sabemos si son realmente idénticas en la práctica? En una *simulación por ordenador* lo sabemos, pero en una *construcción real* hay una *imposibilidad práctica* de asegurar que las dos condiciones iniciales son realmente idénticas. Si aceptamos el hecho de que no conocemos las condiciones iniciales a la perfección, debemos admitir la posibilidad de introducir un *ligerísimo error* o *incertidumbre*. Para investigar el impacto de ese ligerísimo error podemos preparar una simulación con dos péndulos dobles que tengan condiciones iniciales casi, pero no del todo, iguales. Esa simulación la podemos observar en la Figura 5.10 en la página siguiente. Se muestra la posición de los péndulos cada cuarto de segundo. El cómic hay que seguirlo en vertical y en cuatro columnas, para facilitar la visualización. Los péndulos comienzan con movimientos iguales, por ejemplo en 0,75 segundos con posiciones parecidas, pero a partir de 6,00 s hay diferencias sospechosas, en 7,50 s vemos diferencias rotundas, en 10,00 s va cada uno por su cuenta, pare-

ciendo increíble que empezaran a la par. Esta sensibilidad a las condiciones iniciales es una de las claves para entender la impredecibilidad del futuro.

21.00 s

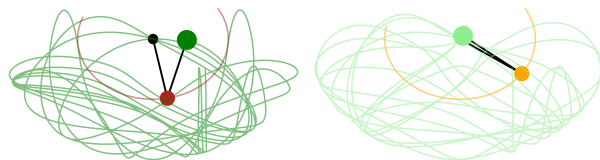


Figura 5.9: Simulación del movimiento de dos péndulos dobles con condiciones iniciales “casi idénticas”, con estela de su historial completo en 21 segundos

Para completar el cuadro, la Figura 5.9 ilustra el movimiento de estos dos péndulos dobles dejando una estela prolongada que recoge toda la historia de su trayectoria en 21 segundos de simulación. Aquí vemos claramente que las estelas son bien diferentes, a pesar de haber partido con condiciones iniciales casi idénticas. Puede llamar la atención la trayectoria del disco rojo, que tiene, naturalmente, menos libertad que el verde.

## 5.2.2 Problema de los tres cuerpos

Este problema de física clásica consiste en encontrar el movimiento en el espacio de tres cuerpos con masas diferentes sometidos a mutua atracción gravitatoria, como por ejemplo el sistema Luna, Tierra y Sol.

El enunciado del problema se sitúa en 1867, por el mismo ISAAC NEWTON en sus *Principia Mathematica* [9]. Dos siglos más tarde, HENRI POINCARÉ demostró que este problema no tiene una solución en forma de expresiones algebraicas e integrales [11]. Las soluciones, en general y salvo conocidas excepciones, son órbitas que, a diferencia del problema de dos cuerpos, no se repiten nunca o no son cerradas. El trabajo de POINCARÉ es uno de los primeros precedentes claros de la *teoría del caos* [3].

El *problema de los tres cuerpos* tiene versiones simplificadas, que, sin perder la característica principal de sistema dinámico caótico, pueden ser analizadas mejor.

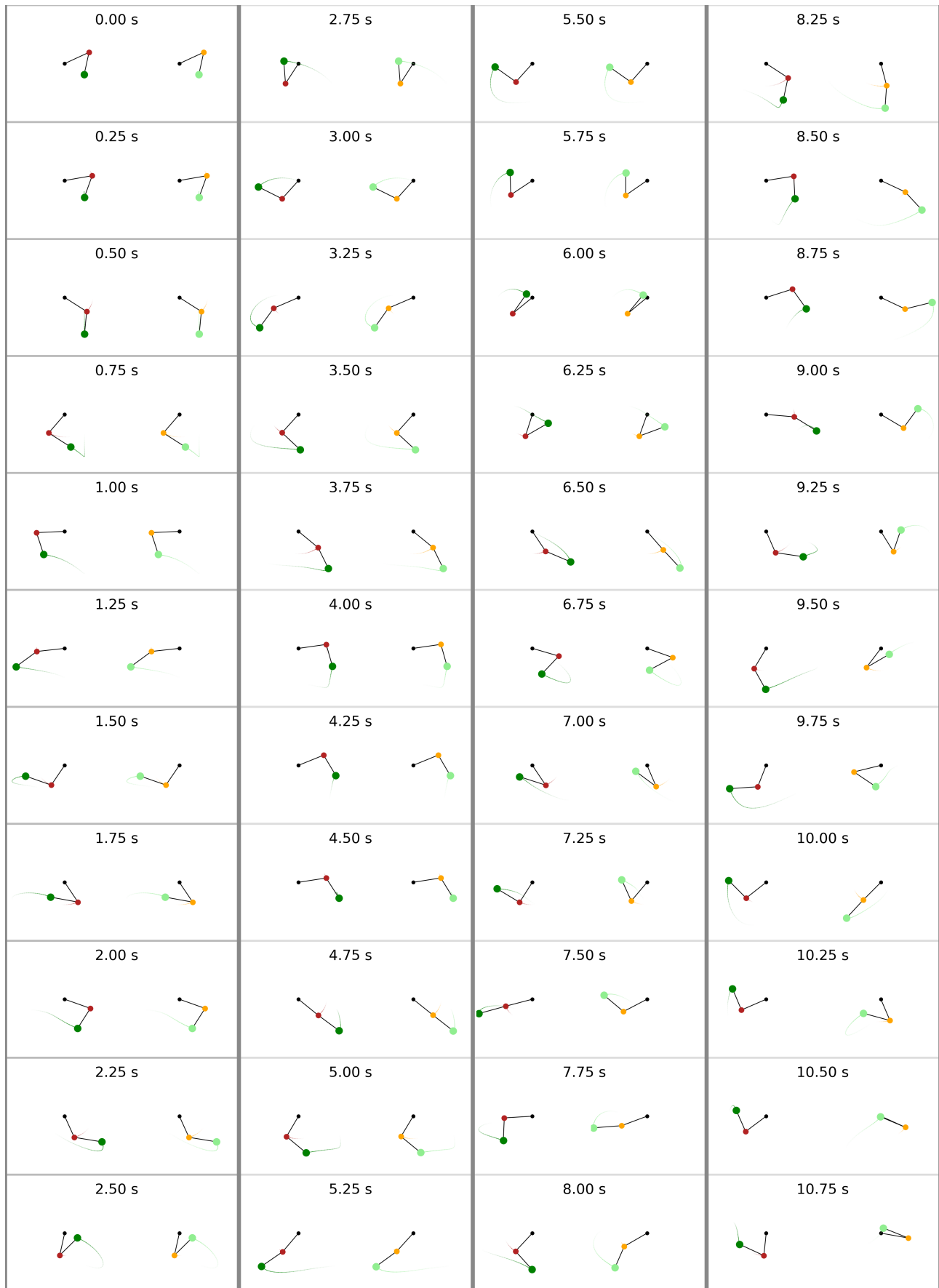


Figura 5.10: Simulación del movimiento de dos péndulos dobles con condiciones iniciales muy parecidas



POINCARÉ estudió el problema de tres cuerpos con las siguientes simplificaciones: supuso que una de las tres masas es insignificante frente a las otras dos, el movimiento de las tres masas ocurre en un plano y, por último, el movimiento de las dos masas principales es circular con velocidad angular constante. Para visualizarlo, podríamos pensar en el movimiento de una nave espacial atrapada en el campo gravitatorio de la Tierra y la Luna. En su movimiento, la nave espacial pasaría cerca de la Tierra en algunos momentos y de la Luna en otros en una órbita, en general, no cerrada y caótica. En la búsqueda de las soluciones de este problema, POINCARÉ llegó muy cerca a varios puntos centrales de la teoría del caos, como son las *órbitas no periódicas acotadas* y las *estructuras fractales* (ver Tabla 5.2 en la página 71)

### 5.2.3 El sistema de Lorenz

El meteorólogo estadounidense EDWARD N. LORENZ investigaba en 1963 los límites en la predicción meteorológica. Diseñó experimentos muy interesantes para tal fin e ideó un sistema dinámico sencillo para profundizar en sus ideas. Buscaba una relación entre la predecibilidad de las condiciones atmosféricas y la física y las matemáticas que nos ayudan a entenderlas. LORENZ ideó un sistema dinámico no lineal, algo más complicado que los ejemplos del péndulo doble o el problema de los tres cuerpos, pero todavía con la aparente sencillez de los anteriores cuando lo comparamos con los sistemas reales como la atmósfera. El de LORENZ es un sistema que describe la *convección* en un sistema cerrado como podría ser una olla o, para ser más precisos, la evolución de las corrientes de agua dentro de la olla, en la que aparecen pequeñas burbujas de aire por el calentamiento. Dichos fenómenos de convección son parte fundamental de los fenómenos atmosféricos, en los que parámetros como la temperatura, diferencias de presión o de densidad juegan un papel determinante. Considerando la atmósfera como un sistema cerrado, limitado por el espacio y por la superficie terrestre, y con una interpretación distinta de las magnitudes de las variables del modelo, el sistema de LORENZ proporciona información muy valiosa sobre la dinámica atmosférica. Matemáticamente el modelo es un sistema dinámico con tres *variables*, es decir, tridimensional en el espacio de fases, aunque esas variables no sean espaciales. Es un sistema dinámico y es no lineal, por tanto no tiene solución analítica: no podemos saber el valor de esas variables en función del *tiempo* a partir de una única

expresión cerrada sino únicamente mediante cálculos numéricos particulares para cada instante dado. Al igual que hicimos con el péndulo doble, podemos realizar una simulación de ordenador para esos cálculos numéricos.

¿Cómo es esta simulación? Tomamos las ecuaciones de evolución de las variables (ver caja siguiente) y las preparamos en un programa, algo asequible a cualquier persona aficionada a la simulación con un ordenador corriente, no hace falta un superordenador. El ordenador tampoco puede proporcionarnos la solución exacta, pero nos puede ayudar, calculando mucho más rápido que nosotros. A partir de las ecuaciones y el estado inicial de las variables, que llamamos condiciones iniciales, el ordenador calculará el primer paso: aumentando el tiempo, puede calcular los valores nuevos de las variables en ese primer paso. Esos nuevos valores los guarda para repetir la operación en un segundo paso. Nos dará valores aproximados de las variables en ese segundo paso, basándose en los valores obtenidos en el primer paso. Y así sucesivamente, paso a paso, en un proceso llamado *iterativo*, iremos obteniendo los valores de las variables, es decir, lo que llamamos evolución del sistema. Finalmente, en un gráfico dibujamos, con ayuda del ordenador, esos valores progresivos del estado del sistema. El resultado lo tenemos en la Figura 5.11 en la página siguiente, parte izquierda.

La evolución del sistema describe una figura curiosa. Parece que algunas zonas tienen preferencia sobre otras, las líneas se agrupan en torno a esas zonas favoritas, aunque también hay líneas solitarias. Y las líneas, solitarias o no, no se cortan nunca. La región del espacio de fases hacia donde el sistema tiende nos permite identificar el atractor del sistema. Este en particular es el atractor de LORENZ. Dado que recuerda las alas de una mariposa, LORENZ acuñó el término *efecto mariposa*, para denotar la sensibilidad a las condiciones iniciales en el atmósfera. Esta evolución temporal del sistema en una región del espacio de fases puede solaparse en un momento dado con la de otra región, propiedad que se denomina *mezcla topológica* y permite distinguir a los sistemas *caóticos* de los *puramente inestables*. De modo que *los sistemas caóticos son un caso particular de los sistemas no lineales*. La Figura 5.11 en la página siguiente, parte derecha, muestra mediante dos ampliaciones sucesivas de una región del atractor de LORENZ que, de todos modos, las trayectorias no se cortan si se amplía lo suficiente la escala de la figura.

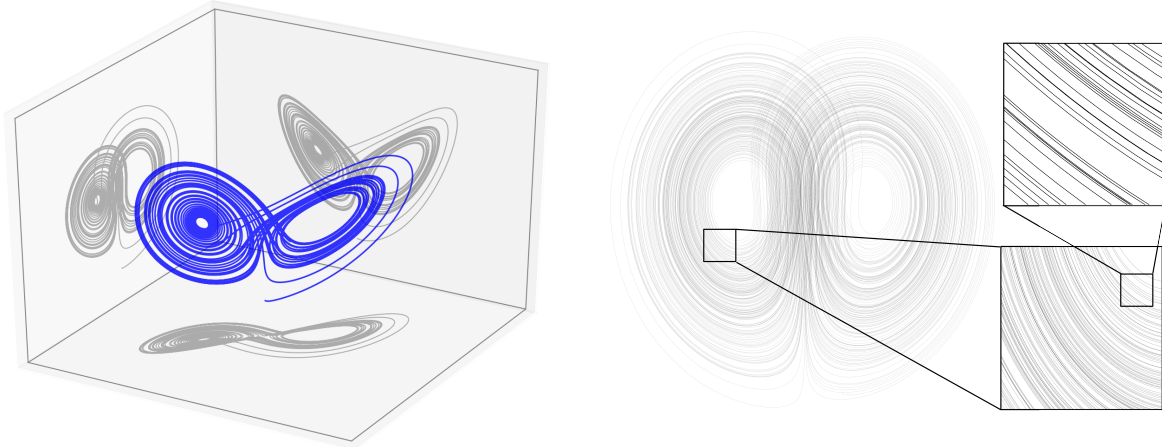


Figura 5.11: Izquierda: representación tridimensional del sistema de LORENZ (1963). derecha: dos ampliaciones sucesivas de una región del atractor de LORENZ.

**El sistema dinámico de LORENZ (1963).** El sistema dinámico de LORENZ es un modelo simplificado de convección que describe el flujo caótico emergente de ecuaciones hidrodinámicas no lineales [2]. Tiene sólo tres dimensiones o grados de libertad, pero muestra muchas propiedades de otros sistemas caóticos más complejos que representan el comportamiento de la atmósfera. El sistema es *forzado* y *dissipativo*, en contraste con los sistemas *hamiltonianos* que conservan la energía; es no lineal, puesto que las ecuaciones contienen productos cruzados de variables dependientes y es autónomo al ser los coeficientes independientes del tiempo.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (5.16)$$

Todas las variables son adimensionales, siendo  $x(t)$  proporcional a la amplitud del movimiento de convección,  $y(t)$  proporcional al gradiente térmico entre las corrientes ascendente y descendente, y  $z(t)$  a la distorsión de la linealidad del perfil vertical de temperatura. Dadas unas condiciones iniciales en  $t = 0$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  existe una única solución  $(x(t), y(t), z(t))$ , es decir, el sistema es teóricamente determinista. Los parámetros  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  son constantes del sistema y diferentes valores dan lugar a diferentes familias de soluciones.  $\sigma$  es el *número de PRANDTL* (viscosidad/conductividad térmica),  $r$  es el *número de RAYLEIGH* (diferencia de temperatura entre base y tope) y  $b$  es la razón entre la longitud y la altura del sistema. LORENZ eligió los valores  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$  que conforman un sistema no lineal y, además, caótico. Por un lado, no lineal por ser sensible a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

Por otro lado, caótico por ostentar *mezclado topológico*, propiedad que tiene que ver con lo parecidas que podrán llegar a ser dos condiciones meteorológicas inicialmente diferentes en la evolución del sistema [7]. Como se ha dicho, la dimensión del espacio de fases es 3, aunque la dimensión del subespacio de soluciones es más pequeña, diferencia relacionada con la divergencia del flujo:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + r + b) \quad (5.17)$$

De modo que un volumen original  $V$  del *espacio de fases* se contraerá en el tiempo:

$$V \rightarrow V e^{-(\sigma+r+b)t} \quad (5.18)$$

Esta reducción del volumen del espacio de fases no es más que la concentración de estados posibles del sistema, tras un cierto tiempo de evolución, en una región más pequeña que la inicialmente ocupada por los estados, región que, si tiene lo que se llama estructura *fractal*, entonces hablamos de *atractor extraño*. Una solución del sistema de LORENZ tiene una parte inicial transitoria y después converge a un atractor extraño. La parte derecha de la Figura 5.11 muestra una simulación numérica con condiciones iniciales  $(x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 0)$  usando un esquema *euleriano* con paso de tiempo  $\Delta t = 0,01$ . El llamado exponente de LYAPUNOV cuantifica la separación de trayectorias infinitamente próximas; por tanto, da una medida de la sensibilidad a las condiciones iniciales [8]. No puede hallarse analíticamente en general y suele, por tanto, simularse [5].



Figura 5.12: Simulación de la evolución en el atractor de LORENZ de un conjunto de condiciones iniciales ligeramente diferentes entre sí. Los puntos de color verde identifican los estados actuales del sistema en cada instante dado. Las líneas de color gris representan las trazas dejadas por los estados del sistema (ver texto).

En la Figura 5.12 mostramos una simulación de gran belleza en la que un conjunto de condiciones iniciales próximas evoluciona en el tiempo en el *atractor de LORENZ*. Por simplicidad, se ha omitido una buena parte de la evolución inicial, de modo que sólo mostramos un segmento que comienza a los 7,00 segundos de simulación y llegando hasta 12,25 s. Observamos al principio que el conjunto de estados del sistema, especificado para un conjunto de condiciones iniciales ligeramente diferentes, está estirándose. A partir de

7,45 se entretiene un rato en el ala izquierda del atractor. En 9,55-9,70 s se cambia al ala derecha. Hasta aquí la predecibilidad del sistema es grande, esto es, se observa que la zona verde de estados actuales a partir de condiciones iniciales ligeramente distintas ocupa una región delimitada del espacio de fases, lo que quiere decir que dichos estados, aún siendo distintos, son aún similares. En 10,45-10,60 s hay una bifurcación: el conjunto se descompone en dos, dirigiéndose a partir de entonces cada una de las dos



partes a una rama diferente del atractor. Se puede decir que a partir de ese paso se pierde predecibilidad. En pasos como 11,05 s la probabilidad de encontrar soluciones en una rama o en otra, es decir, con valores notablemente distintos de los parámetros involucrados en la evolución del sistema, es prácticamente la misma. Obsérvese con atención la sensibilidad a las condiciones iniciales. El sistema de LORENZ, aparentemente sencillo, esconde una complejidad fascinante. En esencia, la atmósfera se comporta de un modo similar a este sistema. Por esa razón lo eligió LORENZ para convencer a la comunidad científica de sus importantes descubrimientos.

### 5.3 Sensibilidad a parámetros del modelo

Además de la sensibilidad a las condiciones iniciales, la dificultad para predecir las condiciones atmosféricas reside también en la llamada *sensibilidad a los parámetros del modelo*. El conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que usamos para describir el comportamiento de la atmósfera no puede resolverse analíticamente y por ello se hacen las simulaciones por ordenador. Estas simulaciones simplifican las ecuaciones mediante lo que se llama *esquemas numéricos*. Estos esquemas no tienen una precisión absoluta y pequeñas variaciones en los mismos pueden conducir a grandes variaciones en sus resultados, lo que se llama a menudo *error del modelo*.

#### 5.3.1 Otra vez el sistema de Lorenz

**Sensibilidad a los parámetros del modelo en el sistema de LORENZ.** Para comparar el impacto de las dos sensibilidades tratadas hasta ahora, a las condiciones iniciales y a la formulación del modelo, observemos la Figura 5.13. A la izquierda se muestra la evolución del sistema de LORENZ para cada una de sus variables por separado para dos condiciones iniciales muy similares (en azul y en verde). Las soluciones se parecen mucho hasta  $t = 25$  s (la azul tapa a la verde) y después crece su diferencia, sobre todo para  $x$  e  $y$ ; después de  $t = 30$  s la predecibilidad para los valores de  $x$  e  $y$  ha quedado notablemente reducida, aunque  $z$  es más predecible: la diferencia entre la línea azul y la verde es mucho menor. En general, el plazo de tiempo en el que el sistema es todavía predecible depende del estado inicial. Esta característica se llama *dependencia de la predecibilidad con el flujo*.

Por otro lado, el efecto del error en la formulación del modelo puede verse variando ligeramente los parámetros constantes del mismo  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  (LORENZ 1963). En un modelo más complejo y realista de la atmósfera estos cambios corresponderían, por ejemplo, a cambios en las parametrizaciones de la física (sec. 10.5 en la página 147). En la parte derecha de la misma figura vemos de nuevo la evolución del sistema de LORENZ, pero esta vez para dos juegos ligeramente distintos de parámetros  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$ . La predecibilidad se pierde después de  $t = 20$  s para todas las variables del modelo  $(x, y, z)$ .

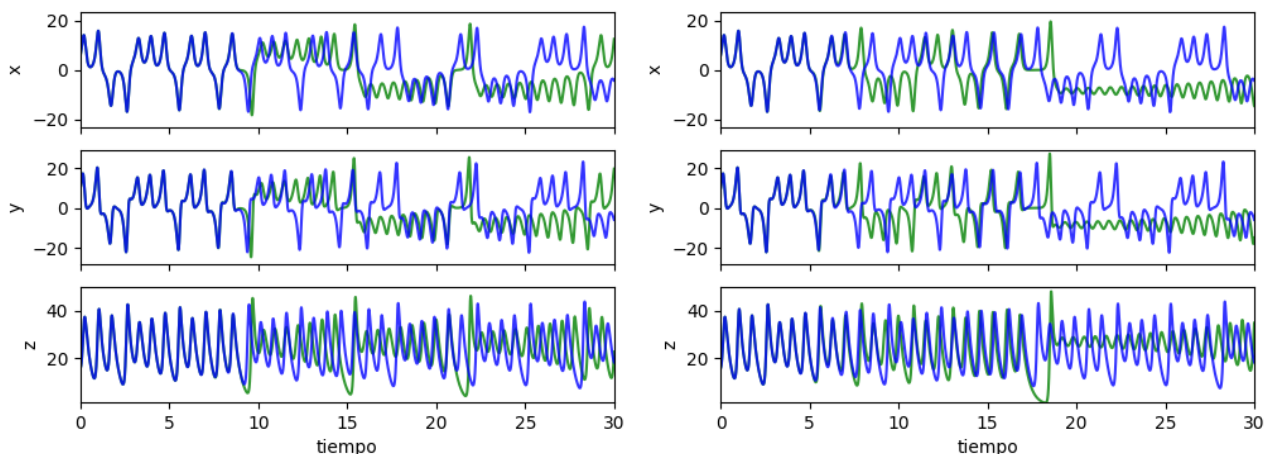


Figura 5.13: Integración numérica del sistema de LORENZ (1963). Izquierda: para dos condiciones iniciales muy similares pero diferentes, en azul  $(x, y, z)_0 = (6,272, 10,221, 15,904)$ , en verde  $(x, y, z)_0 = (6,273, 10,221, 15,904)$ . Derecha: para dos juegos de parámetros del modelo muy similares pero diferentes, en azul  $\sigma, r, b = 10, 28, 8/3$  y en verde  $\sigma, r, b = 10,001, 28,001, 8/3 + 0,001$ .

Con los resultados obtenidos a partir de los estudios del modelo de LORENZ y otros similares que se desarrollaron tras él, se dio un soporte formal por primera vez a la cuestión de los límites en la *predecibilidad* de los fenómenos atmosféricos. Se perfiló un camino a seguir para la comunidad meteorológica. Ese camino nos lleva hasta el momento actual y aún queda mucho por recorrer.

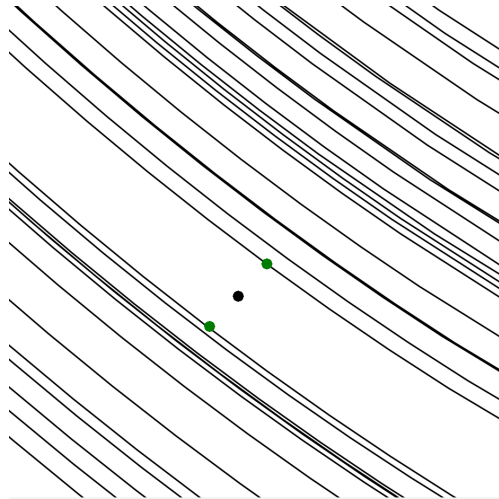


Figura 5.14: Un punto intermedio entre dos puntos físicos del atractor de LORENZ puede no tener sentido físico (ver también Figura 5.11 en la página 66).

5.4 El caos

La Tabla 5.1 muestra un esquema comparativo entre las principales características del paradigma clásico

y el paradigma del caos. En el paradigma clásico se trabaja principalmente con sistemas dinámicos lineales, mientras que al introducir sistemas dinámicos no lineales, algunos de ellos caóticos, nos movemos al paradigma del caos.

Recordemos que los sistemas no lineales se caracterizan entre otras propiedades por la *sensibilidad a las condiciones iniciales*: pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a grandes cambios en la evolución del sistema. Recordemos también que, dentro de los sistemas no lineales, los sistemas propiamente caóticos sufren además de *mezcla topológica* (ver sec. 5.1.5 en la página 60 y 5.2.3 en la página 65), que tiene que ver con lo parecidos que podrán llegar a ser dos estados del sistema que han evolucionado a partir de condiciones iniciales diferentes. Es interesante notar que dos trayectorias pueden llegar a estar arbitrariamente cerca, pero la trayectoria intermedia entre dos trayectorias dadas no tiene necesariamente sentido físico. En la Figura 5.14, donde se rescata una parte de la Figura 5.11 en la página 66, podemos observar una región ampliada del atractor de LORENZ. Los puntos verdes pertenecen a dos trayectorias cercanas pero el punto negro, intermedio entre las dos trayectorias, no tiene sentido físico, no hay ninguna trayectoria en esa región. Como consecuencia no se debe, en general, realizar el promedio entre distintas trayectorias o soluciones. Volveremos sobre este concepto en otros capítulos.

Paradigma clásico	Paradigma del caos
Sistemas dinámicos lineales	Sistemas dinámicos no lineales
Ecuaciones diferenciales lineales	Ecuaciones diferenciales no lineales
Sensibilidad acotada a las condiciones iniciales	Sensibilidad a las condiciones iniciales
Solución analítica	No existe solución analítica
El futuro de un sistema dinámico se puede calcular y predecir a partir del conocimiento de su estado anterior	El futuro de un sistema dinámico se puede calcular pero en general es impredecible a partir de un cierto horizonte: predecibilidad limitada en el tiempo
Determinismo	Determinismo formal, pero limitaciones en la predecibilidad
El comportamiento del todo se puede inferir como la suma de los comportamientos de las partes	La suma de las partes introduce comportamientos cualitativamente nuevos, emergen nuevas propiedades
Dualidad conceptual <i>orden</i> vs <i>caos</i>	Se profundiza y enriquece el concepto de <i>caos</i> : no es opuesto al orden, sino un distinto tipo o grado de orden.

Tabla 5.1: Esquema comparativo entre los paradigmas clásico y del caos

Los sistemas caóticos son, pues, sistemas dinámicos no lineales en los que se observa mezclado topológico. Se suele hablar de caos determinista porque estos sistemas son, estrictamente hablando, sistemas deterministas cuyo comportamiento puede, en principio, ser calculado. Sin embargo, son predecibles por un tiempo y después aparentan volverse aleatorios. El tiempo durante el cual un sistema caótico se puede predecir depende de tres factores: la incertidumbre que toleramos en la predicción, la exactitud con la que podemos medir su estado y una escala de tiempo llamada tiempo de LYAPUNOV que depende de la dinámica del sistema. La incertidumbre en la predicción crece exponencialmente con el paso del tiempo, de modo que si doblamos el plazo de predicción la incertidumbre, al menos, se cuadriplica o algo peor. En la práctica esto implica que una predicción útil no puede hacerse para un plazo superior a 2-3 veces el tiempo de Lyapunov del sistema. En esos plazos mayores el sistema aparenta ser aleatorio. Esto es lo que ocurre en la predicción meteorológica, a la que se suele asociar un tiempo de Lyapunov de 2-3 días, a lo sumo una semana, según la situación.

La predicción detallada del tiempo meteorológico a largo plazo es por tanto imposible y la única posibilidad es la inferencia de la tendencia principal y carácter de la(s) tormenta(s) a partir de observaciones de su estadio temprano. La exactitud de esta predicción está sujeta a la condición de que el vuelo de un saltamontes en Montana ¡podría trasladar una tormenta de Filadelfia a Nueva York!

Por lo tanto, aunque las ideas de LORENZ tienen precedentes, se asume a menudo que LORENZ acuñó el término *efecto mariposa* para denotar la sensibilidad a las condiciones iniciales en la atmósfera. Como hemos visto, podría haberse llamado *efecto saltamontes* o *efecto gaviota*, pero terminó llamándose *efecto mariposa*. La representación del atractor de LORENZ recuerda las alas de este animal y el efecto mariposa ha llegado a convertirse en un icono cultural popularmente asociado al caos. En este libro utilizaremos este icono como puente entre los sistemas dinámicos no lineales sencillos y la atmósfera como sistema dinámico no lineal complejo, así como como icono gráfico del espacio de fases de la atmósfera en conjunto, tal como veremos en el capítulo 12 en la página 165.

## 5.5 El efecto mariposa

En una conferencia en 1972 en la Sociedad Americana para el Avance de la Ciencia (American Association for the Advancement of Science, AAAS), el meteorólogo EDWARD N. LORENZ pronunció la célebre frase «*El aleteo de una mariposa en Brasil puede producir un tornado en Texas*». Según parece, LORENZ había empleado anteriormente el símil de una *gaviota provocando una tormenta*, pero la de la mariposa es una frase más llamativa [12]. Aunque desde el punto de vista científico no es precisamente cierta, sí que resume de forma notablemente efectista el efecto de la *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

Aunque, desgraciadamente, en la comunidad meteorológica no se pudo prestar demasiada atención al descubrimiento de LORENZ hasta finales de los años 80, éste no fue el primero en llamar la atención sobre el problema de la *predecibilidad atmosférica*. A mediados de los años 1950 NORBERT WIENER ya expresaba su preocupación por este problema [14] y, anteriormente, en 1898 el físico WILLIAM SUDARDS FRANKLIN escribió [12]:

## 5.6 Conclusiones

Los *sistemas dinámicos* son modelos matemáticos que explican sistemas cuyo estado va cambiando con el tiempo. Los sistemas dinámicos lineales son una aproximación restrictiva de la realidad que, a pesar de su éxito, no puede dar explicación a muchos fenómenos observados en la naturaleza. Para los sistemas no lineales no existen herramientas matemáticas tan poderosas como las desarrolladas para los sistemas lineales, pero sus propiedades pueden explorarse mediante simulaciones que permiten explicar un amplio abanico de procesos físicos fuera del alcance de la aproximación lineal.

Estos *sistemas dinámicos no lineales* son sensibles a las condiciones iniciales, es decir, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden conducir a grandes diferencias en la evolución del sistema, lo cual limita en el tiempo su *predecibilidad*. A aquellos sistemas dinámicos no lineales que, además, presentan mezclado topológico en sus diagramas de fases los llamamos *sistemas caóticos*. En particular, la atmósfera es un sistema dinámico fuertemente no lineal



y caótico, con gran sensibilidad a las condiciones iniciales y, por ende, con predecibilidad en un tiempo finito.

El paradigma clásico, con aproximaciones lineales, con todo su rotundo éxito, es una aproximación que ha encontrado sus limitaciones. Tan importante es conocer la aproximación propiamente dicha como sus limitaciones y su rango de aplicabilidad. El universo es, principalmente, caótico y utilizamos a menudo la linealidad como aproximación. Sólo vemos la punta de un iceberg: en la naturaleza hay una enorme complejidad. Todavía nos falta lenguaje matemático, físico y ordinario para abordar esa problemática misteriosa y fascinante aunque, desde POINCARÉ, hacemos camino al andar.

## 5.7 Anexo: conceptos asociados a sistemas dinámicos no lineales

Aunque no es necesario para seguir este capítulo ni el resto de este libro, a modo ilustrativo y para motivar otras lecturas, introducimos brevemente en la Tabla 5.2 algunos conceptos y propiedades generales ligados a los sistemas dinámicos no lineales.

Sensibilidad a las condiciones iniciales	Pequeñas diferencias en el estado inicial pueden conducir a grandes diferencias en la evolución del sistema.
Atractor	Subconjunto del espacio de fases (estados posibles) hacia el que converge un sistema en su evolución. Los llamados atractores extraños van ligados al caos.
Bifurcaciones	Transición de una fase de equilibrio con un punto fijo (punto hacia el que converge el sistema) a otra con dos o más al variar un parámetro.
Fractal	Objeto geométrico con estructura aparentemente irregular pero que se repite a diferentes escalas, hay ejemplos abundantes en la naturaleza.
Turbulencia	Flujo con baja difusión de momento, alta convección y cambios espacio-temporales rápidos de presión y velocidad. El número de REYNOLDS, proporción entre fuerzas inerciales y viscosas, permite diferenciar el flujo laminar del turbulento.
Dimensión fractal	Generalización de la dimensión ordinaria, puede tener valores no enteros, e.g. entre 2 y 3, mide cómo llena el espacio una estructura.
Cascada de energía	El flujo inestable produce torbellinos cada vez más pequeños, hasta que son difundidos en calor por viscosidad.
Autosemejanza	Propiedad de objetos en los que el todo tiene la misma forma que una o varias de sus partes, e.g. las ramas de helecho.
Realimentación	Una parte de la señal de salida de un sistema se redirige a la entrada del mismo, formando un bucle, que puede contribuir a la estabilidad del sistema.
Auto-organización	Proceso espontáneo con fluctuaciones aleatorias amplificadas por realimentación positiva, resultando en organización distribuida, robusta y estable, e.g. la emergencia de patrones de convección en un fluido.
Caos	Complejidad topológica en el diagrama de fases. El caos se da sólo en algunos sistemas dinámicos no lineales.

Tabla 5.2: Conceptos y propiedades generales ligados a los sistemas dinámicos no lineales. Se incluyen términos técnicos que no se explican en detalle pero pueden motivar para otras lecturas.

## 5.8 Referencias

- [1] ASHWIN, Peter, BUESCU, Jorge y STEWART, Ian. “From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability”. En: *Nonlinearity* 9.3 (1996), página 703 (citado en página 56).
- [2] BERTUGLIA, Cristoforo Sergio y VAIO, Franco. *Nonlinearity, chaos, and complexity: the dynamics of natural and social systems*. Oxford University Press on Demand, 2005 (citado en páginas 60, 66).
- [3] DELSHAMS, Amadeu. *Poincaré, Creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste*. 2005 (citado en página 63).
- [4] HIRSCH, Morris W., SMALE, Stephen y DEVANEY, Robert L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 2013, página 418. ISBN: 9780123820112 (citado en páginas 56, 61).
- [5] KRISHNAMURTHY, V. “A predictability study of Lorenz’s 28-variable model as a dynamical system”. En: *Journal of the atmospheric sciences* 50.14 (1993), páginas 2215-2229 (citado en página 66).
- [6] LANDAU, Lev Davidovich. *The classical theory of fields*. Volumen 2. Elsevier, 2013 (citado en página 60).
- [7] LORENZ, Edward N. “Deterministic Non-periodic Flow”. En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (mar. de 1963), páginas 130-141. ISSN: 0022-4928. DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2) (citado en página 66).
- [8] LYAPUNOV, Aleksandr Mikhailovich. “The general problem of the stability of motion”. En: *International Journal of Control* 55.3 (1992), páginas 531-534 (citado en página 66).
- [9] NEWTON, Isaac y col. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Volumen 1. excudit G. Brookman; impensis TT et J. Tegg, Londini, 1833 (citado en página 63).
- [10] NOETHER, Emmy. “Invariant variation problems”. En: *Transport Theory and Statistical Physics* 1.3 (1971), páginas 186-207 (citado en página 60).
- [11] POINCARÉ, Henri. *Science and method*. Courier Corporation, 2013 (citado en página 63).
- [12] SCOTT, Alwyn C. *The nonlinear universe: chaos, emergence, life*. Springer Science & Business Media, 2007 (citado en página 70).
- [13] SIMMONS, George F. (George Finlay) y KRANTZ, Steven G. (Steven George). *Differential equations with applications and historical notes*. 2016. ISBN: 9781498702621 (citado en página 60).
- [14] WIENER, Norbert. “Nonlinear prediction and dynamics”. En: *Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob.* Volumen 3. 1956, páginas 247-252 (citado en página 70).