Estudio comparativo de la valoración del riesgo de lluvias fuertes mediante las distribuciones de Gumbel y Raíz. Caso de un observatorio del litoral mediterráneo.

R. Garrido (*) y V. Caselles (**)
(*) Instituto Nacional de Meteorología. Centro Meteorológico de Murcia
(**) Departamento de Termodinámica. Facultad de Física. Universidad de Valencia

RESUMEN
Se estudia comparativamente la aplicabilidad de las distribuciones estadísticas de Gumbel y Raíz para valorar los riesgos de ocurrencia de precipitaciones extremas y la fiabilidad que debe concederse a los resultados obtenidos. Considerando las series anuales de lluvias máximas diarias en la provincia de Murcia e imponiendo criterios de control de calidad y aleatoriedad de los datos, se selecciona la serie correspondiente al observatorio de San Javier. Se calculan las probabilidades asociadas a la distribución de Gumbel (estimando el valor de sus parámetros mediante los cinco métodos más universalmente aceptados) y a la distribución Raíz (mediante el método de máxima verosimilitud), evaluándose la bondad del ajuste general proporcionado, la estabilidad de los parámetros y la magnitud de la extrapolación efectuada con el máximo histórico.
Para la distribución de Gumbel se concluye que ningún método de estimación resulta suficientemente satisfactorio, por lo que su validez general para dar cuenta del riesgo de lluvias intensas queda cuestionada. En cambio, la distribución Raíz proporciona un buen ajuste y genera mayor verosimilitud y estabilidad que la de Gumbel, además de proporcionar una explicación satisfactoria para el máximo histórico, pareciendo mostrarse así como una herramienta más apropiada para la valoración del riesgo.

ABSTRACT
In this paper the applicability of Gumbel and Root statistical distributions are compared to evaluate the large rainfall risk and the reliability of the obtained results. Yearly series of maximum rainfall in 24 hours from Murcia (Spain) are considered. Then, taking in account randomness and quality control standard criteria we have selected the series from San Javier Airport. Probabilities derived from both distributions are calculated by applying the most commonly used five methods in Gumbel distribution and the maximum likelihood method in the case of Root distribution. The goodness of the fit they provide, the parameter stability and the size of the extrapolation for the historical maximum are also evaluated.
We can conclude that, in Gumbel distribution, none of the methods are sufficiently satisfactory. Thus, there is a doubt about the general validity of this distribution. On the other hand, Root distribution provides a good fit and gives greater likelihood and stability than Gumbel's one. Furthermore, it provides a satisfactory explanation for the historical maximum. So it seems that Root distribution is a more suitable tool to evaluate large rainfall risk.

1. INTRODUCCIÓN

Prácticamente todos los años, y principalmente en otoño, algún episodio de lluvias fuertes en el área mediterránea española causa daños de importancia, provocando inundaciones devastadoras y cobrándose, en ocasiones, vidas humanas. Esta situación, que por supuesto no se limita al Mediterráneo, obliga a tener en cuenta ciertas cuestiones fundamentales en el diseño de planes de emergencia, en el proyecto de obras hidráulicas, como embalses, desagües, etc. y, de manera más general, en el de todas aquellas estructuras cuyo fallo podría poner en peligro vidas o bienes materiales. Todo ello sobre la base de aspirar a conseguir la mejor relación posible entre seguridad y costes económicos y poder adoptar decisiones de manera más objetiva.

Los principios de Hidrodinámica y Termodinámica con los que debería relacionarse el análisis hidrológico están suficientemente bien establecidos, pero el medio natural en el que éstos tendrían que aplicarse, la atmósfera, es tan extenso, irregular y sólo parcialmente conocido que, a menudo, elementos esenciales del mismo no son, o no pueden ser, medidos directamente. Esta problemática justifica que un análisis hidrológico pueda admitir dos tipos fundamentales de enfoque: mientras que una aproximación de carácter determinista utilizaría las leyes que describen los procesos físicos, otra de carácter estadístico o probabilista analizaría las frecuencias de ocurrencia de las variables hidrológicas involucradas, tomando como referencia lo ocurrido en el pasado.

El estado actual de conocimientos o desarrollo no permite la realización de predicciones meteorológicas, deterministas en mayor o menor grado, que sean fiables para un plazo de tiempo que alcance más allá de unos pocos días. Admitida esta realidad, se impone la necesidad de intentar también describir ciertos sucesos hidrológicos en plazos más largos mediante un enfoque probabilístico.

De esta manera, el análisis de las frecuencias de ocurrencia de lluvias y sus intensidades, que llegan a ser de magnitud extraordinaria en extensas áreas de todo el mundo, junto con la aplicación de modelos matemáticos de síntesis de datos hidrológicos, se nos puede revelar de gran importancia, entre otras aplicaciones, en el diseño y construcción de las estructuras de control del agua.

Comúnmente, el análisis de las frecuencias de lluvias fuertes y la realización de inferencias, son realizados mediante la aplicación de distribuciones estadísticas de valores máximos, siendo la distribución doble exponencial, también denominada de Gumbel, la más universalmente empleada. Los trabajos en los que se utiliza dicha distribución son muy numerosos y, a veces, muy ambiciosos en cuanto a cobertura territorial. En este sentido, en España cabe destacar los célebres trabajos de Elías (1963) y, más recientemente, el Atlas Nacional de España, editado por el Instituto Geográfico Nacional (1992). En ocasiones, también se ha utilizado para la elaboración de climatologías de la intensidad de la lluvia propiamente dicha, definida como volumen de agua por unidad de tiempo y superficie, previas a la construcción de las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia, ampliamente utilizadas en hidrología (Redaño et al., 1986).

Sin embargo el análisis basado en el empleo de la distribución de Gumbel ha sido objeto de diversas críticas debido a que, en más ocasiones de las deseables, ha puesto de manifiesto la existencia de puntos aislados («outliers»), es decir, datos de la muestra que se apartan considerablemente de la ley de distribución de probabilidad que se supone rige a la población, y que aparentemente son inconsistentes con el resto de los datos. Esto puede suceder, por ejemplo, con los máximos históricos de la serie (Garrido, 1992) o en el caso de otras lluvias excepcionalmente grandes. Así, Etoh et al. (1987) muestran las deficiencias de la citada distribución al estudiar las lluvias extremas en Japón y proponen como alternativa la distribución Raíz, que comparte con la de Gumbel la característica de dependencia de dos parámetros, los cuales deben ser estimados a partir de muestras de datos.

Los puntos aislados pudieran ser debidos a diversos motivos:

1. La variedad de causas que originan la lluvia, tales como tormentas aisladas, complejos convectivos, frentes, precipitaciones orográficas, etc.
2. La no aleatoriedad de las series climatológicas, es decir, la existencia de tendencias a largo plazo o periodicidades en el clima.
3. La incorrección de los datos, por causas diversas, y
4. La aplicación a los datos de funciones de distribución de probabilidad inadecuadas.

En este trabajo ignoraremos las dos primeras causas, que caerían dentro del campo de la Climatología Dinámica y de los estudios acerca del Cambio Climático, respectivamente. Efectuaremos controles de calidad de los datos que eliminen, en parte, las fuentes de error y nos centraremos fundamentalmente en la última de las causas enumeradas, es decir, estudiaremos si alguna de las anteriores leyes de distribución es la apropiada.

Por último, convendrá establecer la bondad de las distribuciones mediante índices numéricos objetivos, definiendo dichos índices basándonos en medidas de ajuste general, fiabilidad de los puntos aislados y estabilidad de los parámetros estimados.

2. LA DISTRIBUCIÓN DE GUMBEL

La distribución de Gumbel ha sido utilizada frecuentemente en Climatología para determinar las probabilidades de ocurrencia de valores extremos de diversas variables, entre ellas la precipitación. Las características de esta distribución y sus aplicaciones, así como la descripción detallada de las teorías de valores extremos puede verse, por ejemplo, en la obra de Gumbel (1958), por lo que nos limitaremos a una breve exposición.

La función de distribución de probabilidad de Gumbel, también denominada doble exponencial, primera asíntota de Fisher-Tippet o función de distribución de valores extremos de tipo I, es una función biparamétrica, en cuya deducción se supone, fundamentalmente, que las observaciones de las cuales se toma el máximo son : (i) muy numerosas, (ii) independientes y (iii) se distribuyen de acuerdo a lo que se denomina una distribución de tipo exponencial. Así mismo, se supone que estamos interesados únicamente en los valores grandes de la variable aleatoria.

Con ello, se tiene que la función de distribución de probabilidad acumulada (f.d.a.) puede expresarse en la forma:

$$F(x) = \exp \{-\exp [-a (x-u)]\} \quad [1]$$

siendo u un parámetro de posición y a un parámetro de escala. La estimación de estos parámetros puede efectuarse mediante distintos métodos, a partir de las muestras de datos disponibles. Esta estimación diversa puede provocar diferencias significativas en el cálculo de probabilidades asociadas a la distribución, por lo que resultará conveniente realizar un estudio comparativo de los resultados que proporcionan los distintos métodos de estimación. En el Apéndice 8.1 se ofrece información adicional acerca de los cinco métodos de estimación más universalmente aceptados (momentos, Chow, mínimos cuadrados, máxima verosimilitud y Kimball) y que serán a los que se recurrirá en este trabajo.

3. LA DISTRIBUCIÓN RAÍZ

Etoh et al. (1987) derivaron una nueva distribución biparamétrica de valores extremos para estudiar las lluvias fuertes en Japón, a la que denominaron distribución SQRT-ET-max (Square-root Exponential Type distribution of the maximum) y a la que, por abreviar, nos referiremos como la distribución Raíz.

Para la deducción de dicha distribución se supuso que: (i) la intensidad y la duración de una lluvia son independientes, (ii) una de ellas se distribuye exponencialmente mientras que la otra obedece a una distribución Gamma, (iii) la cantidad total de lluvia es proporcional al producto de ambas y (iv) la ocurrencia de la mayores lluvias responde a un proceso de Poisson. Las tres primeras hipótesis tienen cierta evidencia experimental (Etoh et al., 1987), mientras que la última es tradicionalmente aceptada para fenómenos poco frecuentes y su aplicación al caso de precipitaciones está suficientemente contrastada (Carrera y Martínez, 1991). Si se asume también que únicamente estamos interesados en los valores grandes de la variable aleatoria se puede obtener que la función de distribución de probabilidad acumulada (f.d.a.) responde a la expresión :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \exp\left[-\lambda\left(1 + \sqrt{\beta x}\right) \exp\left(-\sqrt{\beta x}\right)\right] & x \geq 0 \end{cases} \qquad [2]$$

siendo λ un parámetro de forma y β un parámetro de escala. La presencia de la raíz cuadrada obliga a condicionar la probabilidad para $x \geq 0$, de forma que la correspondiente función de densidad de probabilidad (f.d.p.) será :

$$f(x) = \frac{\lambda \beta \exp - \sqrt{\beta x}\, F(x)}{2\left[1 - \exp(-\lambda)\right]} \qquad [3]$$

La presencia del término entre corchetes en el denominador es debida al proceso de condicionamiento, siendo su efecto despreciable si λ es suficientemente grande, de forma que $\exp(-\lambda) << 1$, en cuyo caso la ec. (2) no necesitaría ser modificada para obtener la f.d.a.

La estimación de los parámetros λ y β podría efectuarse por diversos métodos, como en el caso de la distribución de Gumbel, pero el único propuesto por los creadores de la distribución Raíz es el basado en la condición de máxima verosimilitud, pues dadas las características de la función de distribución los cálculos involucrados en los métodos de los momentos o de mínimos cuadrados, por ejemplo, no serían inmediatos y requerirían procesos numéricos de computación. Por otra parte, el método de máxima verosimilitud demostró su bondad cuando lo aplicaron al estudio de lluvias extremas en Japón, obteniendo una gran estabilidad en la estimación de los parámetros (consecuencia lógica del argumento negativo en forma de raíz cuadrada que aparece en la distribución), una mayor verosimilitud en comparación con la distribución de Gumbel (en una proporción aproximada de cinco casos frente a uno) y otras con un mayor número de parámetros (como la distribución Log-normal 3-P) y una fiabilidad aceptable para los máximos históricos. Nos limitaremos, por tanto, a dicho método de estimación, figurando en el Apéndice 8.2 las expresiones para el cálculo.

4. DATOS

Los datos utilizados han sido extraídos de las series de precipitaciones máximas anuales en 24 horas correspondientes a la red principal de observatorios que el Instituto Nacional de Meteorología (I.N.M.), a través de su Centro Meteorológico Territorial de Murcia, mantiene en la provincia de Murcia. En dichas series, cada año se encuentra representado por el valor máximo de precipitación registrada en el observatorio durante un día, iniciando éste a las 0700 TMG (día pluviométrico).

El hecho de utilizar series de máximos anuales diarios se fundamenta en la propia disponibilidad de los datos y en la existencia de buenas bases teóricas para la extrapolación más allá del rango de la observación (W.M.O., 1983a), aun cuando haya que hacer constar la limitación que constituye no tener en cuenta la posibilidad de que el segundo máximo anual pudiera superar a máximos de otros años. Por otro lado, el uso de series parciales, concebidas como las que contienen todos aquellos datos de magnitud superior a un valor prefijado, complicaría la teoría estadística a utilizar, debido a la dependencia de los sucesos, que podrían incluso sucederse diariamente uno a otro y además obligaría a introducir un nuevo parámetro para dar cuenta del umbral seleccionado.

4.1. Control de calidad de los datos

El primer control de calidad de las series lo constituye el hecho de limitarnos a la red principal de observatorios, atendida exclusivamente por personal profesional, lo que supone una garantía en la fiabilidad de los datos, reduciendo al mínimo los errores instrumentales y los derivados de la transmisión de datos.

El siguiente criterio para la selección de los datos estará basado en la longitud de la serie. De acuerdo con las recomendaciones comúnmente establecidas para el caso de datos de precipitación, el tamaño de la muestra necesaria para obtener distribuciones de frecuencia estables viene a situarse en torno a los 40-50 años. Imponiendo la ausencia de cambios de emplazamiento en los últimos decenios, así como un tamaño mínimo de 40 datos, nos vemos obligados a restringirnos a las series correspondientes a los observatorios de San Javier «Aeródromo», con 45 datos (en el período 1945-1991) , y de Alcantarilla «Aeródromo», con 50 datos (en el período 1941-1991).

4.2. Aleatoriedad de las series

Como paso previo a cualquier otro análisis estadístico, es preciso garantizar el carácter aleatorio de las series. Para el caso de observaciones meteorológicas, y siguiendo a Sneyers (1975, p. 5), « ... se puede considerar el carácter aleatorio simple de una serie como suficientemente bien establecido si la aplicación de un test de correlación serial y la de un test de tendencia conducen ... a la aceptación de la hipótesis nula [serie aleatoria]». Aún cuando es lógico que determinadas series de tiempo de carácter meteorológico presenten persistencia (Essenwanger, 1976), en principio, no hay razones para que ésta deba admitirse en el caso de las lluvias extremas anuales.

El test de correlación serial más apropiado y general es el de Wald-Woldfowitz (cuya simplificación conduciría al test de las secuencias), que se aplica en su forma unilateral (sólo se produce rechazo en la eventualidad de correlación serial positiva, es decir, persistencia). Como test de tendencia podríamos utilizar el que está basado en el cálculo del coeficiente r_s de Spearman o bien en el del coeficiente t de Kendall (test de Mann), ambos en su forma bilateral. La combinación de los resultados de los dos tests (correlación serial y tendencia) y de los correspondientes niveles críticos de significación puede hacerse utilizando el test de significación múltiple de Fisher.

Siguiendo los procedimientos descritos por Sneyers (1975) para la aplicación de estos tests se ha obtenido los distintos niveles de significación que figuran en la Tabla I. De ella se deduce, fijando el nivel de significación en el valor $\alpha_0 = 5\%$, que no es rechazable la hipótesis del carácter aleatorio de la serie correspondiente a San Javier, que proporciona valores del nivel de significación múltiple de Fisher del orden del 69%, independientemente de que combinemos el test de correlación serial del Wald-Woldfowitz con los de tendencia de Spearman o de Mann. Por el contrario, los valores correspondientes a Alcantarilla se reducen hasta valores cercanos al 3%, por lo que según el criterio indicado, hemos de rechazar la hipótesis de aleatoriedad y esto es debido, fundamentalmente, al bajísimo nivel crítico de significación obtenido en el test de correlación serial, que se sitúa en apenas el 1%, aproximadamente, y que parece indicar la existencia de persistencia en la serie. En consecuencia, por exigencia previa a la aplicación de la distribución de Gumbel, que está basada expresamente en la hipótesis de aleatoriedad, será la serie de San Javier la única que deba ser seleccionada para el estudio de la distribución estadística.

Tabla I

VALORES DE LAS ESTIMACIONES DE LOS NIVEL ES CRÍTICOS DE SIGNIFICACIÓN (%) OBTENIDOS EN LOS TEST APLICADOS A LAS SERIES DE DATOS DE LOS OBSERVATORIOS

TEST DE ALEATORIEDAD		OBSERVATORIO San Javier	Alcantarilla
Correlación Serial (Wald-W.)		35 4	1.3
Tendencia	Spearman	92 2	43.8
	Mann	92.2	28.1
COMBINACIÓN DE TESTS			
Fisher	Wald-W. + Spearman	69.2	3.6
	Wald-W. + Mann	69.2	2.5

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De acuerdo con las expresiones de cálculo de los distintos métodos de estimación de los parámetros de las distribuciones de Gumbel y Raíz expuestos en los Apéndices se ha obtenido los valores que figuran en las primeras columnas de la Tabla II. Para juzgar la bondad o idoneidad de las funciones de distribución que genera cada una de esas estimaciones, convendrá manejar los siguientes índices numéricos.

Tabla II

VALORES DE LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS a Y u DE LA DISTRIBUCIÓN DE GUMBEL Y DE LOS PARÁMETROS β Y λ DE LA DISTRIBUCIÓN RAÍZ, PERÍODO DEL RETORNO T DEL MÁXIMO HISTÓRICO Y EXTRAPOLACIÓN E, OBTENIDOS SEGÚN LOS DISTINTOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

DISTRIBUCIÓN DE GUMBEL

MÉTODO	a (10^{-2})	u	T (años)	E
Momentos	2.49	41.8	1.300	29
Chow	2.24	40.6	645	15
Mínimos cuadrados	1.99	37.6	340	8
Máxima verosimilitud	3.55	46.8	23.300	516
Kimball	3.26	47.3	10.100	226

DISTRIBUCIÓN RAÍZ

MÉTODO	β (10^{-1})	λ	T (años)	E
Máxima verosimilitud	4.04	12.7	650	14

5.1. Bondad del ajuste general

El estadístico Chi-cuadrado nos puede proporcionar una medida de la discrepancia existente entre las frecuencias teóricas y las empíricas, supuesto un tamaño n de la muestra suficientemente grande, a un nivel de significación dado, que situaremos en $\alpha_0 = 5\%$, en ensayo unilateral. Denominaremos α al nivel crítico de significación asociado a cada valor de Chi-cuadrado, de forma que $(1-\alpha)$ nos dará una medida del grado de incompatibilidad de la situación observada con la hipótesis de adherencia a una distribución de Gumbel.

Puesto que el tamaño de la muestra está limitado a n = 45, en la prueba Chi-cuadrado será preciso adoptar una solución de compromiso entre el número de intervalos de clase y la frecuencia absoluta esperada para cada uno de ellos, siendo razonable fijar un número de 8 intervalos de clase equiprobables, es decir, con valores para las frecuencias absolutas esperadas de 45/8, lo que cumplirá con los requerimientos mínimos para ambos condicionantes (Houghton, 1985). De esta manera, los intervalos de clase estarán formados por octiles. Sin embargo, puesto que también existe recomendaciones en el sentido de sugerirse muestras del orden de 100-200 datos, la exactitud del test de Chi-cuadrado podría estar limitada. La consideración de estas reservas podría hacernos rebajar el nivel de significación hasta el valor $\alpha_0 = 1\%$ antes de rechazar la hipótesis de ajuste.

Las figuras 1, 2 y 3 muestran la diferencia entre las frecuencias empíricas obtenidas en cada intervalo de clase para los diversos métodos de estimación y la frecuencia teórica de las distribuciones de Gumbel y Raíz asociadas.

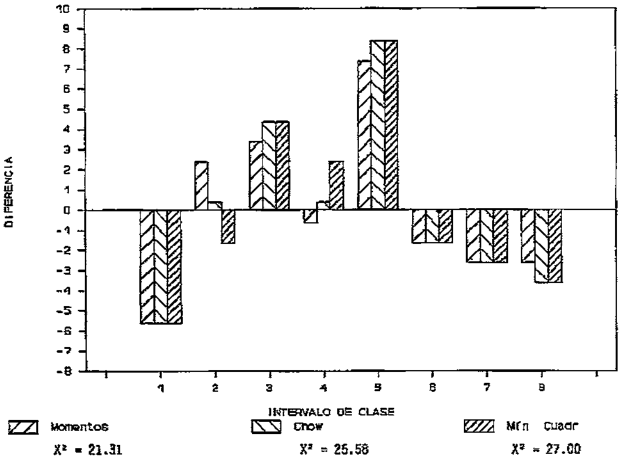

Figura 1. *Diferencia entre las frecuencias absolutas empíricas y la teórica, según los intervalos de clase, correspondientes a las distribuciones de Gumbel asociadas a los métodos de estimación del Grupo 1.*

En la cola izquierda de las distribuciones de Gumbel correspondientes a los métodos de los momentos, de Chow y de mínimos cuadrados, que en lo sucesivo denominaremos métodos del Grupo 1, se observa (Fig. 1) una fuerte discrepancia, al no presentarse ninguna observación en el primer octil. En los intervalos siguientes, del segundo al quinto, las frecuencias observadas vienen a ser muy superiores a las esperadas, mientras que en los últimos intervalos se presenta la situación inversa, con una manifiesta infravaloración de la probabilidad. Los valores del estadístico Chi-cuadrado obtenidos para estos métodos son muy superiores a los críticos, tanto al nivel de significación del 5% (Chi2 = 11.07) como en el del 1% (Chi2 = 15.09), correspondiéndoles grados de incompatibilidad del 99.99% aproximadamente, los cuales obligan al rechazo de la hipótesis de adherencia de los datos a una distribución de Gumbel. En otras palabras, si los datos provinieran de una distribución de Gumbel, tan sólo en una de cada 104 pruebas que realizáramos encontraríamos un valor tan alto del estadístico Chi2.

El panorama cambia radicalmente cuando analizamos (Fig. 2) los resultados de los métodos de máxima verosimilitud y de Kimball, que denominaremos métodos del Grupo 2, o bien cuando recurrimos a la estimación máximo-verosímil de la distribución Raíz (Fig. 3). En estos casos, las discrepancias son pequeñas, con valores bajos del estadístico Chi2, evitando el rechazo de la hipótesis de adherencia. Nótese que estos tres métodos de estimación tienen en común el hecho de emplear alguna condición de máxima verosimilitud (véase los Apéndices), por lo que la imposición de dicha condición está estrechamente relacionada con la bondad del ajuste general. Los máximos de las funciones de verosimilitud (logarítmicas) para las distribuciones de Gumbel y Raíz tienen los valores $l^G_{MAX} = -224.3$ y $l^R_{MAX} = -221.4$, respectivamente, por lo que en nuestro caso puede afirmarse que la distribución Raíz presenta una mayor verosimilitud que la distribución de Gumbel.

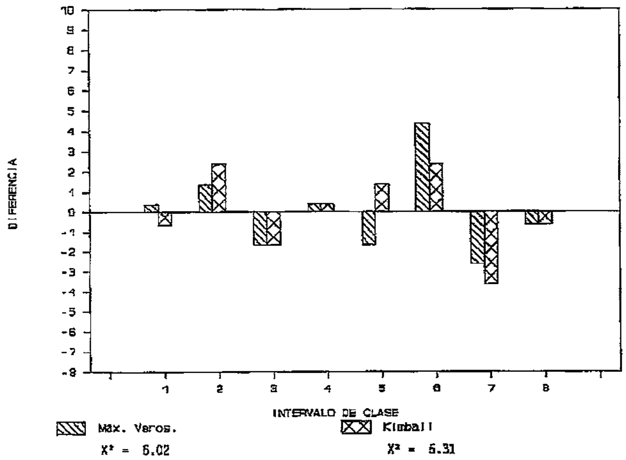

Figura 2. *Diferencia entre las frecuencias absolutas empíricas y la teórica, según los intervalos de clase, correspondientes a las distribuciones de Gumbel asociadas a los métodos de estimación del Grupo 2.*

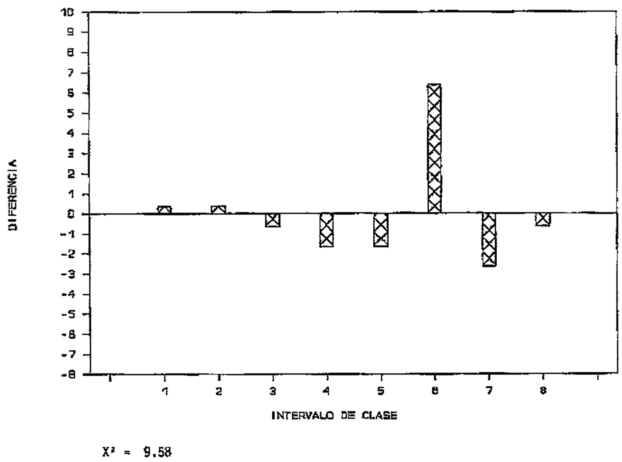

Figura 3. *Diferencia entre las frecuencias absolutas empíricas y la teórica, según los intervalos de clase, correspondiente a la distribución Raíz asociada al método de estimación de máxima verosimilitud.*

5.2. Fiabilidad de máximos históricos

La cola final de la distribución de máximos posee un interés preferente, por cuanto afecta a la predicción de las lluvias más fuertes, permitiendo la extrapolación temporal más allá de la longitud de los registros históricos.

La capacidad de explicar los máximos históricos va a ser evaluada en función de la probabilidad teórica que proporciona la distribución, recurriendo al período medio de retorno T(x) para un valor x de la precipitación, que se define en términos de la f.d.a. (Sneyers, 1975; W.M.O., 1983b) como:

$$T(x) = \frac{1}{1 - F(x)} \qquad [4]$$

Dado un valor de x, la probabilidad Q (x) de que durante n años no se produzca un valor superior a x vendrá dada, en términos de su período de retorno T (x), por:

$$Q(x) = \{F(x)\}^n = \{1 - [1/T(x)]\}^n \qquad [5]$$

y, por tanto, la probabilidad P (x) de que se alcance o supere dicho valor al menos una vez en n años será (W.M.O., 1983a):

$$P(x) = 1 - Q(x) = 1 - \{1 - [1/T(x)]\}^n \qquad [6]$$

La probabilidad de ocurrencia P del máximo histórico de precipitación nos da una idea de la magnitud de la extrapolación efectuada cuando al valor de dicho máximo le asignamos su período de retorno T. Si T>>n, lo cual se cumple en nuestro rango de valores, se tiene :

$$\{1 - [1/T]\}^n \approx 1 - (n/T) \qquad [7]$$

con lo cual la probabilidad P puede escribirse también como:

$$P \approx n/T \qquad [8]$$

que es el cociente entre el tamaño de la muestra n y el período de retorno T. La magnitud de la extrapolación E puede definirse como:

$$E = 1/P \approx T/n \qquad [9]$$

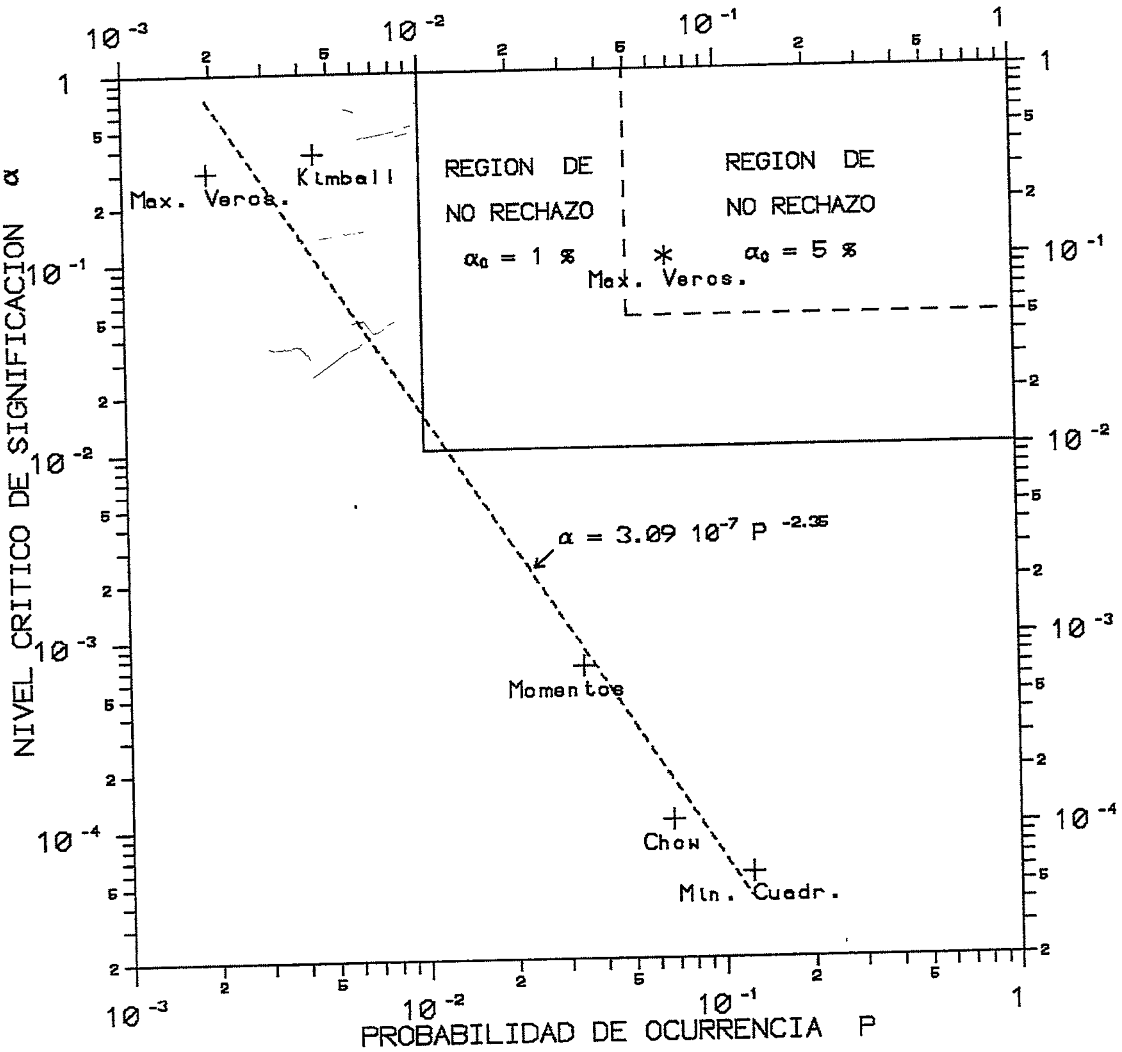

Figura 4. *Nivel crítico de significación α del test Chi-cuadrado, frente a la probabilidad de ocurrencia P del máximo histórico para los diversos métodos de estimación de la distribución de Gumbel (+) y de la distribución Raíz (*).*

La Tabla II también ofrece los valores obtenidos por los diversos métodos de estimación para el período de retorno T del máximo histórico, registrado en el año 1987 y con un valor de 330 l/m^2, y la extrapolación E que se efectúa. Se observa, en general, que los períodos de retorno teóricos son muy grandes, llegando a ser del orden de 10^4 años en los métodos de estimación de la distribución de Gumbel correspondientes al Grupo 2 (máxima verosimilitud y Kimball), lo cual es irreal si se tiene en cuenta el tamaño de la serie original (45 años), resultando que los valores del período de retorno son varios cientos de veces superiores y, por tanto, las probabilidades P sólo serán algo superiores a 10^{-3}. Si imponemos, como criterio objetivo, que la probabilidad P deba ser al menos del 5% y, por consiguiente, se exige que las extrapolaciones deban ser tales que el período de retorno estimado para el máximo no supere en más de 20 veces el tamaño de la muestra ($E \leq 20$), tendremos que rechazar los métodos anteriormente citados y, también, el método de los momentos.

La Figura 4 muestra simultáneamente los valores de P y los niveles críticos de significación α obtenidos del test Chi-cuadrado. Para los métodos de estimación de la distribución de Gumbel se aprecia, en general, que cuando aumenta la probabilidad P de ocurrencia del máximo disminuye el valor de la significación del ajuste, quedando todos los métodos en la región de rechazo, ya sea por lo irrealista del período de retorno obtenido para el máximo ($P < 5\%$) o porque el ajuste general proporcionado es malo ($\alpha < 5\%$). Es más, incluso rebajando las exigencias al 1% no hay ningún método de los ensayados que supere ambas pruebas.

Al no ser achacable el fracaso de la distribución de Gumbel al método de estimación empleado, nos encontramos con que es la propia aplicación de la distribución la que queda cuestionada y, con ella, la validez de las hipótesis de partida, en especial en lo referente al tipo de distribución inicial, el cual puede ser muy diverso, o bien al tamaño de la muestra anual de la que se extrae cada máximo, que tal vez no sea suficientemente grande, pero que no puede ser ampliado por limitaciones naturales. Lo que sí podría ampliarse es la base empírica utilizada, extendiendo el presente estudio a otras series de observaciones o bien aumentando la cobertura territorial, lo cual es propósito de un futuro trabajo de los autores.

Por el contrario, en la Fig. 4 se pone de manifiesto que la distribución Raíz ofrece un nivel crítico de significación α del orden de los obtenidos mediante los métodos de estimación del Grupo 2 de la distribución de Gumbel, como era deseable, y con probabilidades de ocurrencia P similares a las que se consigue con los métodos del Grupo 1, las cuales eran razonables, resultando así que el empleo de la distribución Raíz no es rechazable.

5.3. Estabilidad de la distribución

La estabilidad de la distribución, o de los parámetros que la definen, resulta interesante en orden a hacer nuestras estimaciones lo menos dependientes posible de la muestra considerada. La estabilidad no es que sea recomendable en sí misma, sino que está supeditada a otros índices de bondad, siendo su importancia secundaria frente a la de otros índices de bondad. Tan sólo a igualdad de dichos índices sería preferible una distribución lo más estable posible.

La dependencia con la muestra considerada va a cuantificarse estimando, en primer lugar, los parámetros a partir de la muestra completa y, en segundo lugar, prescindiendo de su máximo histórico, con lo que obtendremos dos evaluaciones distintas para la frecuencia de dicho máximo. En estas condiciones, la estabilidad S podrá establecerse mediante el cociente de los períodos de retorno asociados a dichas frecuencias (Etoh et al., 1987), es decir:

$$S = \frac{T\,(\text{máx}),\,n}{T\,(\text{máx}),\,n-1} \qquad [10]$$

siendo T (máx),n y T (máx),n-1 los períodos medios de retorno del máximo histórico cuando se considera la serie completa de n datos o incompleta de n-1 datos, respectivamente. En general $T(\text{máx}),n \leq T(\text{máx}),n-1$ y el índice S así definido variará entre 0 y 1, aunque en algún caso particular pueda suceder la relación inversa. En este último caso se podría redefinir S como su inverso.

En el caso de la distribución de Gumbel, los valores obtenidos para la estabilidad de los distintos métodos de estimación oscilan entre el 1% para el método de los mínimos cuadrados y el 18% para el de máxima verosimilitud. Por el contrario, para la distribución Raíz la estabilidad alcanza un valor del 57 %, mostrándose, con mucho, como la distribución más estable.

En la Figura 5 se representa los valores de la estabilidad S frente a los de las probabilidades P, observándose que, en general, al aumentar P disminuye S cuando se trata de la distribución de Gumbel. Los métodos del Grupo 1, que no realizan extrapolaciones muy grandes, son muy inestables, variando el período de retorno del máximo en un factor del orden de 50. Por otro lado, los métodos del Grupo 2 resultan más estables que los anteriores, con una variación del período de retorno del máximo aproximadamente 10 veces inferior a la de los métodos del Grupo 1, pero, como vimos, no son admisibles por la magnitud de los períodos de retorno que implicaban y de las extrapolaciones efectuadas. En el caso de la distribución Raíz, que presentaba un buen ajuste y una extrapolación razonable, nos encontramos con una gran estabilidad, de manera que la variación del período de retorno del máximo no llega a alcanzar un factor 2.

6. CONCLUSIONES

1. Se ha estudiado la aplicabilidad de las distribuciones biparamétricas de Gumbel y Raíz a las series de precipitaciones máximas diarias en estaciones meteorológicas de la

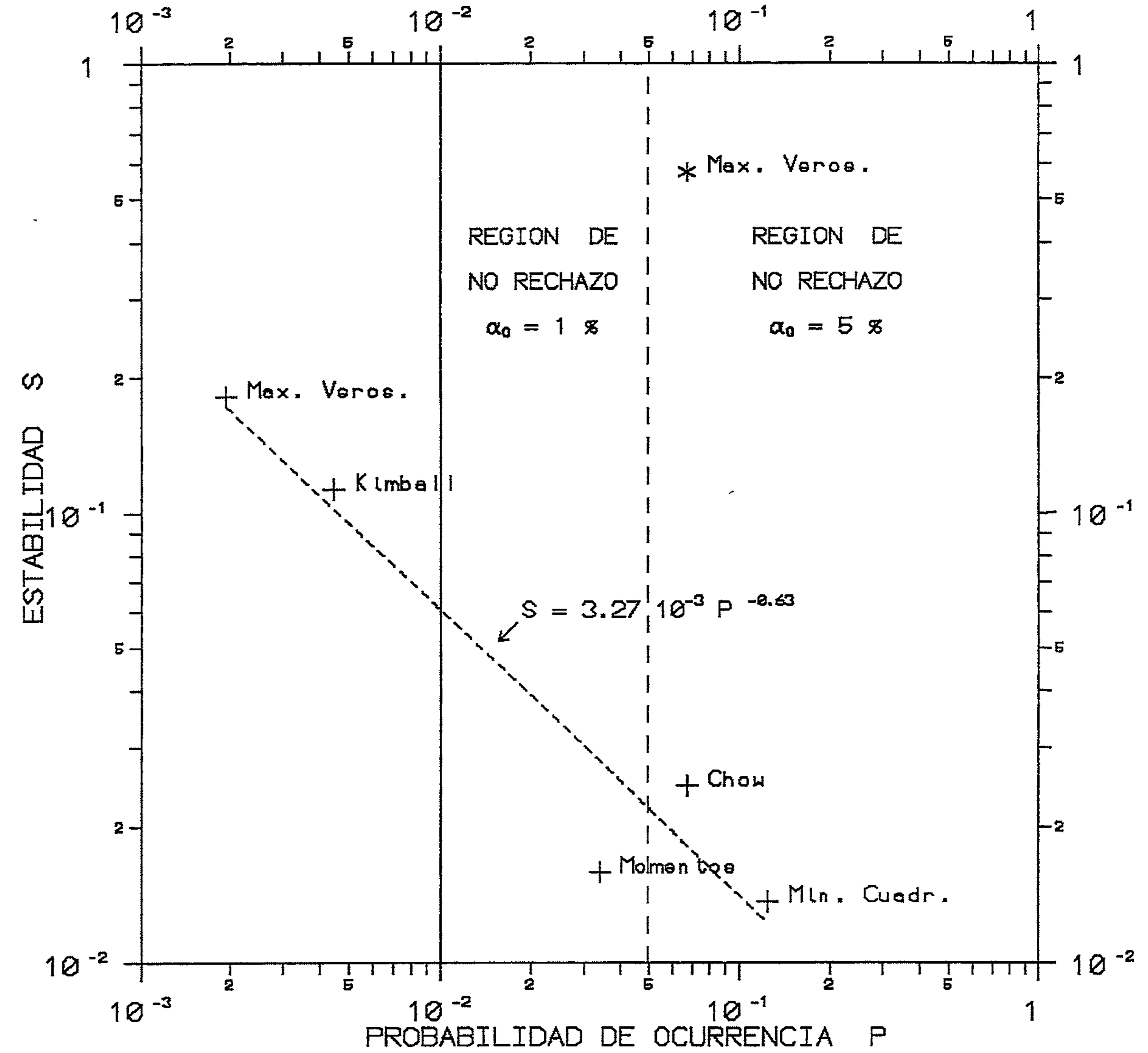

Figura 5. *Estabilidad S frente a la probabilidad de ocurrencia P del máximo histórico, para los diversos métodos de estimación de la distribución Gumbel (+) y de la distribución Raíz (*).*

provincia de Murcia. Imponiendo criterios de control de calidad de los datos (atención de personal profesional, longitud de las series y constancia de emplazamiento), así como la superación de tests de aleatoriedad, la serie correspondiente a San Javier «Aeródromo» ha sido seleccionada para estudiar su distribución estadística.

2. Tomando esta serie como muestra, se ha estimado el valor de los parámetros de la distribución de Gumbel mediante los cinco métodos más universalmente aceptados: momentos, Chow, mínimos cuadrados, máxima verosimilitud y Kimball. Para evaluar la idoneidad de las distribuciones asociadas, se introduce índices numéricos referentes a la bondad de ajuste general, la fiabilidad de los máximos históricos y la estabilidad de la distribución correspondientes a cada uno de los métodos de estimación.

3. Los tres primeros métodos citados, agrupados en que denominamos Grupo 1, deben ser rechazados en ba al pésimo ajuste general que proporcionan, evalua mediante el test Chi-cuadrado, con grados de incompati lidad entre la distribución teórica y la empírica del 99.9 aproximadamente, mientras que los dos métodos restan (Grupo 2), proporcionan ajustes no rechazables.

4. Sin embargo, estos últimos métodos generan per dos de retorno para el máximo histórico del orden de 1 años, que son completamente irrealistas si los comparan con la longitud de la serie (45 años), por lo que tambi son insatisfactorios. Adicionalmente, se ha encontrado q la estabilidad de la distribución es mayor cuando se emp an los métodos del Grupo 2 que cuando se recurre a los Grupo 1, siendo estos últimos especialmente inestabl

dado que el período de retorno del máximo puede variar en un factor aproximado de 50, según que se incluya o no en la muestra el propio máximo.

5. En consecuencia, por uno u otro motivo, se concluye que ningún método resulta suficientemente satisfactorio, y la validez general de la distribución de Gumbel para dar cuenta del riesgo de precipitaciones intensas queda en cuestión.

6. Por el contrario, cuando se emplea la distribución Raíz, estimando sus parámetros mediante el método de máxima verosimilitud, el ajuste general que se obtiene es suficientemente bueno, con una verosimilitud mayor que en el caso de la distribución de Gumbel, el período de retorno que proporciona para el máximo histórico resulta razonable y la estabilidad de la distribución es muy superior a la que ofrece cualquiera de los métodos de estimación de la distribución de Gumbel. Por todo ello, en nuestro caso y teniendo en cuenta la limitada base de datos utilizada, parece que el empleo de la distribución Raíz se muestra como un procedimiento más apropiado para la valoración del riesgo de lluvias fuertes que el uso de la distribución asintótica de Gumbel.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al personal del Centro Meteorológico de Murcia y en especial a F. Martínez y J. M. Martín por su asistencia informática y sugerencias sobre el trabajo.

8. APÉNDICES

8.1. Métodos de estimación de parámetros de la distribución de Gumbel

8.1.1. Método de los momentos

El método de los momentos es el que presenta un cálculo más cómodo y quizás, debido a ello, sea uno de los más empleados. En él se atribuyen a los parámetros valores deducidos de los momentos de primer y segundo orden de la muestra en la forma (Martín, 1981):

$$a = \pi / (\sigma\sqrt{6}) \qquad (A)$$

$$u = \bar{x} - (\gamma / a) = \bar{x} - (\gamma\, \sigma \sqrt{6} / \pi) \qquad (B)$$

siendo $\bar{x}$ y σ la media y la desviación típica insesgada empíricas, respectivamente, de la muestra de n observaciones, y $\gamma = 0.5772157...$ la constante de Euler.

8.1.2. Método de Chow

Este método, utilizado habitualmente por el I.N.M., considera el tamaño finito de la muestra y reproduce al anterior cuando n se hace infinito. Nos limitaremos a indicar que las estimaciones de los parámetros vienen dadas (Gumbel, 1953; Elías, 1963; W.M.O., 1983b; Martín, 1981) por:

$$a = D_n / \sigma \qquad (C)$$

$$u = \bar{x} - (\gamma / a) = \bar{x} - (\gamma_n \sigma / D_n) \qquad (D)$$

siendo γ_n y D_n la media y desviación típica (sesgada) de una serie de n términos en la que el término i-ésimo viene dado por:

$$y_i = -\log\{-\log[i/(n+1)]\} \qquad (E)$$

Para n tendiendo a infinito γ_n tiende a $\gamma = 0.5772157...$ la constante de Euler, mientras que D_n tiende a $\pi/\sqrt{6}$, por lo que comparando las expresiones (C) y (D) con las (A) y (B) se comprueba que, efectivamente, aquellas eran un caso particular de éstas, en el límite de grandes valores de n.

8.1.3. Método de mínimos cuadrados

La estimación basada en el método de mínimos cuadrados parte de la consideración de que la ec. (1) puede expresarse también como:

$$-\log[-\log F(x)] = ax - au \qquad (F)$$

que puede representar la ecuación de una recta de pendiente a y ordenada en el origen –au. Si ordenamos los datos x_i por orden creciente $x_1^\circ \le x_2^\circ \le ... \le x_n^\circ$, aceptamos (Sneyers, 1975) que la estimación empírica más conveniente para $F(x_m^\circ)$ es el valor m/(n+1), e imponemos que la suma de los cuadrados de los errores sea mínimo cuadrática, es posible obtener en definitiva:

$$a = \frac{n \sum_m x_m^\circ Y_m - \sum_m x_m \sum_m Y_m}{n \sum_m x_m - (\sum_m x_m)^2} \qquad (G)$$

$$u = \bar{x} - (\bar{Y} / a) = \bar{x} - (\gamma_n / a) \qquad (H)$$

con $\bar{Y} = \gamma_n$ y, por tanto, cuando n es muy grande, $\bar{Y}$ tiende también al valor de la constante de Euler.

8.1.4. Método de máxima verosimilitud

El método de estimación de los parámetros a y u más eficaz estadísticamente, es decir, aquel que extrae la mayor cantidad de información de la serie de observaciones, de forma que la varianza de la distribución muestral de los parámetros sea mínima es el que se basa en hacer máxima la función de verosimilitud («likelihood») de la distribución, definida (Sneyers, 1975; W.M.O., 1983a) como el producto de las n funciones de densidad de probabilidad individuales correspondientes a las n observaciones. La imposición de la condición de máximo conduce a las ecuaciones:

$$\hat{a}^{-1} = \bar{x} - \frac{\sum_i x_i \exp(-\hat{a}x_i)}{\sum_i \exp(-\hat{a}x_i)} \qquad \text{(I)}$$

$$\hat{u} = -\frac{1}{\hat{a}} \log \frac{\sum_i \exp(-\hat{a}x_i)}{n} \qquad \text{(J)}$$

donde, como de costumbre, se ha utilizado el símbolo (^) para representar las estimaciones de máxima verosimilitud. La resolución de dichas ecuaciones, que se encuentran acopladas, requiere el empleo de algún método numérico, como pudiera ser el propuesto por Gumbel (1953).

8.1.5. Método de Kimball

Debido a que las ec. (I) y (J) son algo complicadas de resolver y además conducen a estimaciones que sólo son asintóticamente insesgadas, en ocasiones se utiliza otras estimaciones algo menos eficaces pero insesgadas y con un cálculo más cómodo. Sneyers (1975) cita las soluciones propuestas por Lieblein y por Kimball. La segunda de ellas es más eficaz que la primera y presenta además la ventaja de que su eficacia es regularmente creciente con n . Nos limitaremos únicamente al segundo de los métodos citados, mientras que una descripción del primero puede encontrarse, por ejemplo, en Gumbel (1953).

La solución de Kimball se obtiene a partir de las ec. (I) y (J), sustituyendo log F (x_m°) por su valor medio y utilizando un coeficiente corrector b_n de forma que la estimación obtenida para el parámetro a sea insesgada, resultando:

$$a^{-1} = n\, b_n \sum_m x_m^{\circ} \{1 - [1/m + 1/(m+1) + ... + 1/n]\} \qquad \text{(K)}$$

siendo el valor correspondiente del coeficiente b_{45} = 1.0542..., mientras que la estimación correspondiente para u vuelve a ser:

$$u = \bar{x} - (\gamma/a) \qquad \text{(L)}$$

8.2. Estimación de parámetros de la distribución Raíz

Siguiendo un procedimiento similar al caso de los parámetros de la distribución de Gumbel, el parámetro ß de la distribución Raíz puede estimarse como aquel que maximiza el valor de la función de verosimilitud logarítmica l:

$$l_{MAX} = \sum_i \log f(\hat{\lambda}, \hat{\beta}; x_i) \qquad \text{(M)}$$

para lo cual puede recurrirse a algún método numérico, teniendo en consideración que la estimación máximo-verosímil para el parámetro λ viene ligada a la estimación del parámetro ß mediante la relación:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_i \sqrt{\hat{\beta}x_i} - 2n}{\sum_i \hat{\beta}\, x_i \exp(-\sqrt{\hat{\beta}x_i})} \qquad \text{(N)}$$

De esta forma, el hecho de haber recurrido a procesos numéricos de computación estaría justificado por la máxima eficacia estadística que se consigue mediante el método de máxima verosimilitud.

9. BIBLIOGRAFÍA

Carrera, A.R. y Martínez, M. (1991): «Aproximaciones óptimas de las variables que describen sucesos extremos en meteorología». *Rev. de Geofísica,* 47, 85-92.

Elías, F., (1963) : «Precipitaciones máximas en España. Régimen de intensidades y frecuencias». *Ministerio de Agric. Serv. de Conservación de Suelos. Bol. Técn. n° 3,* Madrid. 267 pp.

Etoh, T. et al. (1987): «SQRT-Exponential type distribution of maximum». *Hidrologic frequency modeling,* 253-264. Reidel Publ. Comp.

Essenwanger, O.M., (1976): «Applied statistics in atmospheric science. Part A: Frequencies and curve fitting». *Developments in Atmospheric Science,* 4A. Elsevier, Amsterdam. 412 pp.

Gumbel, E.J., (1958): «Statistics of extremes». *Columbia University Press,* New York. 375 pp.

Garrido, R., (1992): «Limitaciones de la distribución de Gumbel en la valoración del riesgo de lluvias fuertes». Ponencias y Comunicaciones del 1er Congr. *Iberoamericano sobre Reducción de Desastres Naturales,* 217-226. Univ. Politécn. de Valencia.

Houghton, D.D. (Ed.), (1985): «Handbook of applied meteorology». *Wiley-Interscience,* New York. 1461 pp.

Instituto Geográfico Nacional, (1992): «Atlas nacional de España: Climatología (Secc. 2, Grupo 9)». *Centro Nacional de Información Geográfica,* Madrid. 4 pp. + 24 lám.

Martín, V., (1981): «Ajustes de distribuciones útiles en Ingeniería Civil». *Estadística y Simulación aplicadas a la Ingeniería Civil. Col. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos.* Madrid.

W.M.O., (1983a): «Guide to hydrological practices, Vol. 2 (Analysis, forecasting and other applications)». *World Meteorological Organization,* No. 168, Geneva.

W.M.O., (1983b): «Guide to climatological practices». *World Meteorological Organization,* No. 100, Geneva. 8 chapt.

Redaño, A. et al. (1986): «Climatología de las intensidades extremas de lluvia en Barcelona». *Rev. de Geofísica,* 42, 193-198.

Sneyers, R., (1975): «Sobre el análisis estadístico de las series de observaciones». *World Meteorological Organization, Nota Técn. n.° 143,* Geneva. 186 pp.