

# UTILIDAD DE LOS FILTROS DE KALMAN EN METEOROLOGÍA

Andrés Sáez Rivilla  
TÉCNICO S. DE ESTUDIOS Y DESARROLLOS

## Introducción

Los filtros de Kalman (fK) son algoritmos numéricos de tipo recursivo bastante complejos. Surgieron fuera del campo de la meteorología hace 38 años para ser aplicados a sistemas más sencillos que la atmósfera. Para la publicación de su trabajo Kalman encontró verdaderas dificultades iniciales con los editores, hasta que en otoño de 1960, invitado a exponer sus recientes resultados en la NASA, se reconoció la importancia de su descubrimiento en la estimación y control de la trayectoria en el Proyecto Apolo, un viaje por el espacio tripulado por hombres con la misión de alunizar por vez primera en la historia de la humanidad y regresar posteriormente a la tierra.

En 1985, Kalman fue galardonado con el "Kyoto Prize", el equivalente al Premio Nobel japonés, y en 1990, con ocasión de cumplir sus 60 años, la comunidad internacional le dedicó unas Jornadas especiales en honor de sus logros, pioneros de una nueva ciencia denominada Teoría Matemática de Sistemas, de las que existe un "Festschrift" publicado con igual título<sup>(1)</sup>.

Las aplicaciones fK en meteorología son muy diversas actualmente, siendo de las más interesantes la estimación del estado inicial de la atmósfera en la predicción numérica a plazo medio, que por su propia índole tiene un dominio de integración hemisférico o global para las ecuaciones del modelo. El poner las condiciones iniciales al modelo supone en sí mismo un problema gigantesco, que ha dado origen a las nuevas disciplinas de *asimilación 4D*, operación de mezcla o combinación de los datos previos a un instante, lo que va a permitir la determinación de un conjunto completo de datos para el arranque del modelo, y de *inicialización*, que trata tal conjunto completo de forma que desaparezcan de él las ondas rápidas (ondas cortas de gravedad ficticias) responsables de las malas predicciones del modelo durante las primeras horas del medio plazo.

En los distintos Centros de Predicción a Medio Plazo, entre ellos el Centro Europeo (ECMRWF), se tratan ambos problemas de manera separada; pero debido a que la asimilación 4D y la inicialización están íntimamente relacionados y no se diferencian entre sí en la acción del filtro de Kalman, su aplicación ha dado buenos resultados en la estimación del estado inicial de la atmósfera en simulaciones numéricas del tiempo atmosférico efectuadas con modelos más simples que los operativos en tales Centros y se persigue que el fK opere muy pronto también en tales Centros.

En efecto, el carácter determinista de partida de los modelos, con ecuaciones tales como la de Euler o de continuidad, queda interrumpido al tenerse que recurrir a un esquema numérico para su integración, ya que la solución analítica de un sistema tan

---

(1) "Mathematical System Theory. The Influence of R. E. Kalman", Springer-Verlag, 1991, Berlín.

complejo como la atmósfera nos tiene vedada su solución analítica. En su condición de sistema discreto es imposible evitar un considerable grado de incertidumbre o error en el conocimiento del estado de la atmósfera en cualquier instante dado, al ser el distanciamiento entre estaciones sinópticas grande, incluso dentro de las regiones más habitadas del planeta. Por el carácter no lineal de las ecuaciones del modelo, estos errores se propagan en las sucesivas integraciones del ordenador, yendo en aumento con el tiempo en razón inversa del tamaño de la escala del fenómeno estudiado; su periodo de doblamiento es de varios días en el caso de las ondas más largas (de varios minutos en el caso de una tormenta), lo que enturbia y finaliza anulando la solución del problema.

El hecho cierto es que para la predicción sólo disponemos de un sistema de dinámica incierta, y lo mejor es expresar con más precisión nuestra ignorancia utilizando las probabilidades. La imposibilidad de poder evitar los errores en la medida se conoce desde los tiempos de Galileo (1564-1642), pero fue Gauss (1777-1855) el primero en obtener estimaciones óptimas en problemas de estimación en astronomía (1795) a partir de datos adulterados con su método de mínimos cuadrados; a pesar de que había ideado dicho método para problemas de estimación lineal, por primera vez su aplicación fue en un problema no lineal. El paralelismo es total con lo que posteriormente sucedería con el filtro de Kalman, pues como ya hemos dicho al comienzo su primera aplicación fue también a un problema no lineal, a pesar de haber sido inicialmente ideado por Kalman para tratar con problemas lineales y, como en el caso de Gauss, se aplica con impunidad y considerable éxito en muchos otros problemas no lineales.

El escenario adecuado a los filtros de Kalman es el espacio de estados, para lo que nuestro esquema numérico de predicción deberá estar expresado en la forma

$$\chi_k = \Psi \chi_{k-1} + \xi_k, \quad k=1,2,\dots$$

siendo  $\chi$  el vector de estado, vector columna de  $n \times 1$  dimensiones,  $\Psi$  la matriz  $n \times n$  determinada por nuestro esquema numérico; en el caso de dinámica lineal

$\Psi_{k-1}$  es independiente de  $\chi_{k-1}$

$\xi$ , es un vector aleatorio de ruido blanco de igual dimensión que  $\chi$  y representa la componente aleatoria del sistema. Sus estadísticos de primer y segundo orden son, respectivamente,

$$E(\xi_k) = 0, \text{ y } E(\xi_k \xi_j^*) = Q \delta_{kj}$$

representando  $E$  el operador del valor esperado y  $Q$  la matriz de covariancia de ruido del sistema; dentro del algoritmo de Kalman el valor de  $Q$  se supone conocido. Para el modelo perfecto,  $Qk = 0, \forall k$ .

Para que pueda operar el filtro de Kalman también hay que suministrarle información sobre la red de observaciones disponible. Toda la información de la que dispongamos en un instante dado perteneciente al intervalo de asimilación viene recogida en el vector de observación  $z$ . Por consiguiente, si disponemos de información en  $N$  instantes correspondientes a dicho intervalo de asimilación, nuestro conjunto completo

de datos para la determinación del estado inicial de la atmósfera vendría determinado por el conjunto de los  $N$  vectores

$$\{z_k; k = 1, 2, \dots, N\}$$

Cada uno de estos vectores se relaciona al vector de estado del instante correspondiente, mediante la ecuación

$$z_k = Hx_k + \zeta_k, \quad (k=1, 2, \dots, N),$$

siendo  $H$  la matriz de observación, de dimensión  $(p \times n)$  y  $p$  la dimensión del vector de observación  $z$ . Tal valor de  $p$  está en función del número de puntos de observación de la red y del número de variables medidas en cada punto. En ocasiones no estará justificado prescindir del subíndice  $k$  en la matriz  $H$  como acabamos de hacer en la ecuación anterior, esto es, suponiéndola constante en el tiempo, circunstancia que no siempre se justifica en la realidad dado que es sabido que el número de estaciones varía de un instante sinóptico a uno subsinóptico y en ellos, además, se mide un número distinto de variables. Tales circunstancias se reflejan por la diferente cantidad y distribución de ceros y unos de los elementos de matriz de la correspondiente  $H_k$ .

En general,  $p \ll n$ , esto es, el número de observaciones de cualquier instante es muy inferior al número de componentes del vector de estado de nuestro modelo numérico. Por ejemplo, si el modelo de simulación numérica del tiempo atmosférico fuese el sistema de ecuaciones para el movimiento fluido en aguas someras ("shallow water") en una única dimensión, tomada a lo largo de un paralelo geográfico (coordenada geográfica  $x$ ), hay tres variables a considerar en la determinación del vector de estado,

$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}$ , Por tanto, si designamos por  $M$  el número de puntos del mallado de discretización espacial de la coordenada geográfica  $x$ , en este caso tendríamos para la dimensión del vector de estado el valor  $n = 3M$  puesto que se precisa conocer cada una de las variables de estado en los  $M$  puntos del referido reticulado geográfico. El caso hipotético  $p = n = 3M$ , haría coincidentes las dimensiones de los vectores de observación y de estado y se reduciría nuestro problema a otro simple de interpolación, posible de resolver sin necesidad de tomar en cuenta la dinámica del sistema.

Finalmente, el vector  $\zeta_k$  representa en la ecuación anterior un vector aleatorio de ruido blanco asociado con la red de observación de dimensión  $(p \times 1)$ , la misma que corresponde al vector de observación  $z$ , cuyo estadístico de segundo orden

$$E(\zeta_k) = 0, \quad E(\zeta_k \zeta_j^*) = R \delta_{jk}$$

es la matriz  $R$  de covariancia de ruido de la red de observación. Existen en el mercado algoritmos para la determinación de ambas matrices ( $Q$  y  $R$ ), ambas necesarias para que pueda operar el filtro de Kalman que pasamos a describir en el siguiente apartado.

## Algoritmo de Kalman

La teoría del filtro de Kalman se basa principalmente en la teoría de matrices, si bien tal teoría resulta insuficiente en alguna medida al tener que intervenir la mente humana circunstancialmente en la decisión, y los fundamentos de la mente humana aún no se conocen bien.

Con la finalidad de interesar a la comunidad meteorológica española por el filtro de Kalman, este mismo autor presentaba su expresión matemática formada por 5 ecuaciones matriciales en la Vª Asamblea Nacional de GEODESIA Y GEOFÍSICA que se celebró en 1983, aunque las ACTAS de la misma no fuesen publicadas hasta cuatro años más tarde<sup>(2)</sup>. En la ecuaciones que figuran a continuación el superíndice  $f$  ("forecast") indica que en el cálculo de la cantidad referenciada no participa la información de ese preciso instante, mientras que, por el contrario, si figura  $a$  ("analysis") como superíndice se indica que en el cálculo se hace uso de la información de ese preciso instante. El circunflejo (^) sobre el vector  $x$  que representa el estado del sistema indica el valor de la estimación de tal cantidad, no su verdadero valor.

$$\hat{x}_k^f = \Psi_{k-1}^a \hat{x}_{k-1}^a$$

$$P_k^f = \Psi_{k-1} P_{k-1}^a \Psi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

$$K_k = P_k^f H_k^T (H_k P_k^f H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f$$

$$\hat{x}_k^a = \hat{x}_k^f + K_k \left( z_k - H_k \hat{x}_k^f \right)$$

*para instantes  $k=1,2,\dots$*

La primera ecuación obtiene el vector de predicción  $\hat{x}_k^f$  en el instante  $k$ , conteniendo las  $n$  componentes con los valores de las variables previstas en los puntos del malla. Se obtiene al multiplicar el vector de análisis  $\hat{x}_{k-1}^a$  por la matriz  $n \times n$  de la dinámi-

(2) Sáez Rivilla, A., "Filtros de Kalman Aplicados a Esquemas que Simulan Numéricamente el Tiempo Atmosférico", COMUNICACIONES de la Vª Asamblea Nacional de GEODESIA Y GEOFÍSICA, págs. 1047 a 1060, Vol. II, n.º 4, 1987, Madrid.

ca del sistema  $\Psi_{k-1}$ . Cuando carecemos de las observaciones correspondientes al instante  $k-1$ , se cumple  $\hat{X}_{k-1}^a = \hat{X}_{k-1}^f$ .

La segunda ecuación obtiene la evolución exacta  $P_k^f$ , matriz de covariancia del error de predicción.

La tercera ecuación obtiene la matriz de ganancia de Kalman  $K_k$ , que luego se aplica en la quinta ecuación del filtro al valor residual  $[z_k - H_k \hat{X}_k^f]$ . El vector  $p$ -dimensional  $z_k$  lo constituyen las  $p$  observaciones disponibles en el instante  $k$ , y  $H_k$  es la matriz de observación, que interpola a partir de los puntos de rejilla en los puntos de localización de las observaciones.

La matriz  $P_k^a$  que figura en la cuarta ecuación es la matriz de covariancia del error del análisis y viene determinada de manera exacta por dicha ecuación.

La presencia de la segunda ecuación en el filtro de Kalman marca la diferencia sustancial con el esquema de la interpolación óptima: la matriz de covariancia del error de predicción se conoce con precisión en el filtro de Kalman, mientras que en la interpolación óptima dicha matriz se aproxima mediante hipótesis adecuadas. Tal diferencia es esencial, pues mediante ella, por ejemplo, se determina el carácter de la propagación de los errores entre regiones con densidad de estaciones de observación muy diferentes, gracias a lo cual el filtro Kalman debe sus propiedades de optimalidad. La principal carga computacional del filtro reside también en ella al requerir su cálculo la multiplicación de matrices  $n \times n$  en cada escalón temporal ( $n$  es la dimensión del vector del sistema  $\hat{X}_k$ ).

La parte de "análisis" del filtro de Kalman está representada en las tres últimas ecuaciones del filtro, una forma bastante simplificada de escribir el esquema de interpolación óptima usual, por lo que ésta resulta coincidente en los dos métodos.

### Programa F.O.R.T.R.A.N del algoritmo aplicado en un caso simple

Vamos a estimar, mediante seis observaciones sucesivas de la posición de una gota de lluvia en caída libre en el campo de gravedad, los estados de este sistema en cada uno de estos instantes aplicando el filtro de Kalman. La dinámica del sistema es

$$\ddot{z} = -g, (Q = 0)$$

y la estimación del estado en cada uno de estos instantes requiere conocer tanto la posición como la velocidad de la gota. Para la aplicación del filtro de Kalman hay que expresar esta ecuación en términos de las variables del espacio de estados y discretizar sus ecuaciones.

El programa FORTRAN que figura en la Lámina 1 muestra los datos de partida del estado inicial, los errores asumidos para arrancar el método recursivo y el vector de observación. En la notación empleada anteriormente:

$$\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 95 \\ 1 \end{pmatrix}; P_0^a = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; Q = 0 \quad y \quad R_k = \sigma_{\epsilon_k}^2 = 1.$$



VJL/VMS SAEZ KALMAN 24-SEP-1984 19:40 LPAO: 25-SEP-1984 09:31 DISC6VAVVMSRI
VJL/VMS SAEZ KALMAN 24-SEP-1984 19:40 LPAO: 25-SEP-1984 09:31 DISC6VAVVMSRI
VJL/VMS SAEZ KALMAN 24-SEP-1984 19:40 LPAO: 25-SEP-1984 09:31 DISC6VAVVMSRI

SSSS AAA EEEEE IZZIZ
A A A E EEE I Z
SSS A A EEEE I Z
S A A AAAAA E I Z
SSSS A A EEEEE IZZIZ

KK KK AAAAAA LL MM MM AAAAAA NN NN
KK KK AAAAAA LL MM MM AAAAAA NN NN
KK KK AA AA LL MMMM MMMM AA AA MM MM
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN
KK KK AA AA LL MM MM MM AA AA MM NN

FFFFFFF 000000 RRRRRRR 11111 333333
FFFFFFF 000000 RRRRRRR 11111 333333
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 00 00 RR RR 11111 33 33
FF 000000 RR RR 11111 333333
FF 000000 RR RR 11111 333333

SSSS AAA EEEEE IZZIZ
A A A E EEE I Z
SSS A A EEEE I Z
S A A AAAAA E I Z
SSSS A A EEEEE IZZIZ

VJL/VMS SAEZ KALMAN 24-SEP-1984 19:40 LPAO: 25-SEP-1984 09:31 DISC6VAVVMSRI
VJL/VMS SAEZ KALMAN 24-SEP-1984 19:40 LPAO: 25-SEP-1984 09:31 DISC6VAVVMSRI
VJL/VMS SAEZ KALMAN 24-SEP-1984 19:40 LPAO: 25-SEP-1984 09:31 DISC6VAVVMSRI

```
DIMENSION P(2,2)
DIMENSION Y(6),AK(2)
OPEN(2, FILE='KALMAN')
X=95.0
V=1.0
P(1,1)=10.0
P(1,2)=0.0
P(2,1)=0.0
P(2,2)=1.0
Y(1)=100.0
Y(2)=97.9
Y(3)=94.4
Y(4)=92.7
Y(5)=87.3
Y(6)=82.1
```

Listing for Andres Saez Rivilla Fri Oct 10 11:16:48 1997

```
DO 20 I=1,6
X=X+V-.5
V=V-1.0
P(1,1)=P(1,1)+P(2,2)+2.0*P(2,1)
P(2,1)=P(2,1)+P(2,2)
D=P(1,1)+1.
AK(1)=P(1,1)/D
AK(2)=P(2,1)/D
Z=Y(I)-X
X=X+AK(1)*Z
V=V+AK(2)*Z
P(2,2)=P(2,2)-AK(2)* P(2,1)
P(2,1)=P(2,1)-AK(2)*P(1,1)
P(1,1)=(1. - AK(1))*P(1,1)
WRITE(2,200) Y(I), X, V, P(1,1), P(2,1), P(2,2)
WRITE(2,99)
20 CONTINUE
200 FORMAT(1X,10(1H ),7F10.4)
99 FORMAT(1X,1H )
STOP
END
```

Table with 7 columns of numerical data: 100.0000, 99.6250, 0.3750, 0.9167, 0.0833, 0.9167, 97.9000, 98.4333, -1.1583, 0.6667, 0.3333, 0.5833, 94.4000, 95.2143, -2.9048, 0.6571, 0.3143, 0.2952, 92.7000, 92.3550, -3.6945, 0.6125, 0.2362, 0.1513, 87.3000, 87.6848, -4.8436, 0.5528, 0.1733, 0.0842, 82.1000, 82.2216, -5.8749, 0.4958, 0.1298, 0.0507

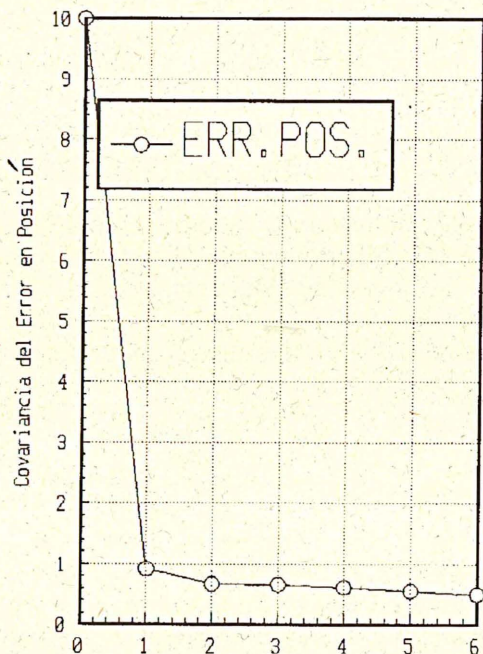
La matriz de observación es  $H = (1 \ 0)$  y los 6 vectores de observación son:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}; z_2 = \begin{pmatrix} 97.9 \\ 0 \end{pmatrix}; z_3 = \begin{pmatrix} 94.4 \\ 0 \end{pmatrix}; z_4 = \begin{pmatrix} 92.7 \\ 0 \end{pmatrix}; z_5 = \begin{pmatrix} 87.3 \\ 0 \end{pmatrix}; z_6 = \begin{pmatrix} 82.1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este programa, inicialmente compilado en un ordenador VAX/ VMS de las instalaciones del Centro de Cálculo de la Universidad de Sevilla en 1984, corre sin dificultad en una estación de trabajo SUN del INM, mostrándose en la referida Lámina 1 la salida del mismo, situada a la derecha del programa.

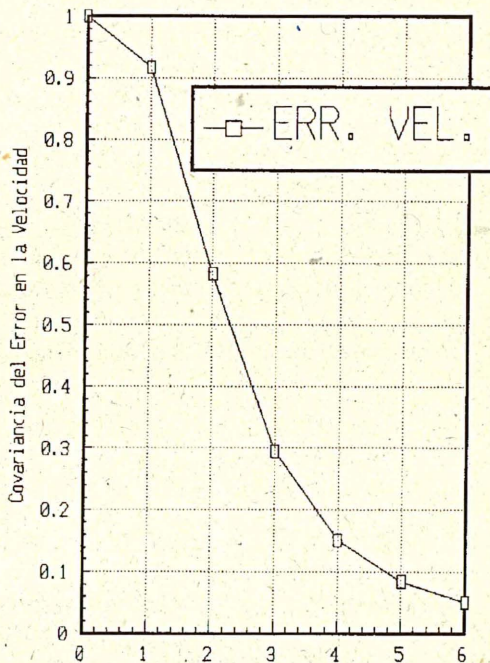
El contenido de cada una de las 6 columnas está indicado en la instrucción de salida WRITE (2,200) del programa FORTRAN, por lo que la 1.ª columna contiene los datos del vector de observación, las columnas 2.ª y 3.ª son las sucesivas estimaciones del vector de estado del sistema, y las tres restantes contiene las covariancias de los errores de predicción (matriz simétrica) en cada una de la 6 estimaciones. Los únicas que nos interesan son las que contienen los términos diagonales ( columnas 4.ª y 6.ª ), debido a que representan los errores cuadrático medios de las estimas de las posiciones y velocidades, respectivamente. El gráfico 1 nos muestra su evolución.

Kalman: Error en la posición



Eje de Tiempos: Instantes de medida

Kalman: Error en la velocidad



Eje de Tiempos: Instantes de medida

Debido a que la observación determina la posición de la gota de agua , una vez que hayamos procesado la primera observación el error de posición cae rápidamente. Por el contrario, el error de la velocidad no decrece substancialmente hasta realizar una segunda observación, debido a que se requieren dos observaciones de posición para la determinación de ambas componentes del vector de estado. El sistema es tal que la

posición no afecta a la velocidad, si no que, por el contrario, es la velocidad la que afecta a la posición. En consecuencia, hemos de disponer de buenas estimas de velocidad antes de poder obtener buenas estimas de posición.

Diremos para terminar, que en el mercado existen paquetes informáticos tales como SIG ("A general purpose signal processing") y SSPACK ("A general purpose state-space package") que facilitan las diversas aplicaciones del filtro de Kalman.