

# La medida del espesor de la atmósfera mediante cálculos de reflexión y refracción

Jesús Ruiz Felipe. Asesor del ámbito científico del Centro de Profesores de Albacete

EL interés suscitado por averiguar el alcance de la atmósfera está motivado desde antiguo, por la necesidad de corregir la posición aparente de los astros, y por tanto, ligado a la medida de la refracción atmosférica, donde juega un rol primordial el espesor de la capa gaseosa. Este artículo pretende analizar cómo se desarrollaron los cálculos que desembocaron en la determinación de la profundidad atmosférica usando criterios únicamente ópticos: la refracción y el crepúsculo.

Si la atmósfera no abrigara la tierra, la luz desaparecería súbitamente al ponerse el sol, tal y como acontece en la luna y otros planetas que carecen de un envoltorio gaseoso, pero en la tierra, a la hora del ocaso, el sol ilumina por un tiempo las capas superiores de la atmósfera y esta proyecta la radiación solar, suministrando a la tierra luz reflejada. Así, la oscuridad aparece paulatinamente a medida que el sol se sumerge en el horizonte e irradia el sector más elevado del aire. El mismo evento acaece al elevarse el sol al amanecer. Es el crepúsculo vespertino o aurora. El crepúsculo alarga el día y acorta la noche.

## El método clásico

Kepler, en el capítulo cuarto de los añadidos a Vitelo (1604), examina las propiedades ópticas de la atmósfera y deduce erróneamente, empleando procedimientos geométricos, el espesor del aire. Este resultado no deriva de los datos de la duración del crepúsculo y por consiguiente, de la declinación del sol bajo el horizonte mientras el destello solar todavía es visible, tal y como dedujeron reflexivamente los ópticos clásicos a los que Kepler enmienda, sino que parte de los principios, aún por formular, de la dióptrica.

Comienza el cuarto capítulo con una referencia a los trabajos de Vitelo (1572) y Alhacen, aunque es bien conocido y señalado por varios autores, que la obra a la que quizá se refiriera el alemán sería (en latín) *Liber de crepusculis*, escrito por Abū `Abd Allāh Muhammad ibn Mu`adh Jayyānī en 1039. En este tratado, el árabe español (al-Jayyani indica natural de Jaén), aparte de interesarse del crepúsculo por motivos vinculados a las oraciones vespertinas y matutinas, muestra una técnica para calcular la altura de la atmósfera. Suponiendo que el aire y el éter son completamente transparentes, son los vapores acuosos que emana la tierra y que se elevan en la atmósfera en forma de nubes, los que reflejan el fulgor solar. Admitiendo que el radio de la tierra es de 3818 millas itálicas, que el ángulo de incidencia es igual al arco de refle-

xión, y que el astro ígneo se encuentra a 18 o 19 grados bajo poniente cuando sus últimas exhalaciones aún son perceptibles, se deduce que la atmósfera sostiene un poder reflexivo óptico a una altura de casi 52 millas (86 Km).

Este procedimiento se mantuvo vigente hasta que el uso del barómetro y los experimentos de Torricelli y Pascal facilitaron una comprensión más completa de la naturaleza atmosférica. Edmond Halley, por ejemplo, utiliza el mismo diagrama que Al-Jayyani

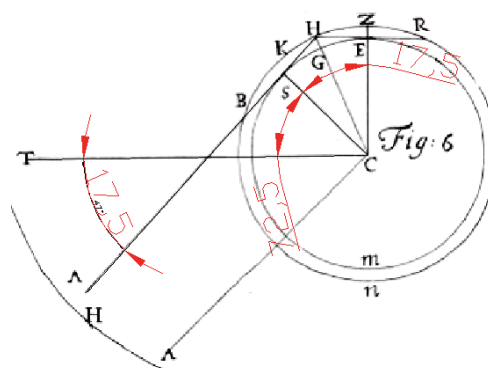


Fig 1: El rayo solar parte de A a 17,5 grados por debajo del horizonte (una vez descontada la refracción). Penetra en la atmósfera en B y choca en su parte más elevada en H, reflejándose e incidiendo en la superficie de la tierra en E.

El astrónomo, educado en Oxford y miembro de la Royal Society, introduce una reducción de medio grado que acarrea la refracción de la atmósfera (ajuste que no acometió Al-Jayyani). El inglés estimaba esta desviación en 32 o 33 minutos. (Por 34 de Tycho). Con un valor para el radio de la tierra de 4.000 millas, la igualdad trigonométrica, (la misma que utilizó el jiennense) quedaría:

$$\cos 8,5^{\circ} = \frac{R_{tierra}}{R_{tierra} + h_{atmósfera}} = \frac{4000}{4000 + h_{atmósfera}}$$

Por consiguiente se obtiene un valor para *the height of the whole air* de 44,4 millas inglesas. El dato computado por Al-Jayyani, sin englobar la refracción atmosférica de medio grado, aunque incluyendo la distancia angular del sol y esgrimiendo el mismo procedimiento, es de 52 millas, siendo la circunferencia de la tierra 24.000 millas itálicas. Una diferencia del 16% con respecto a Halley.

Este método ha sido recurrido como el clásico para cotejar la profundidad de la atmósfera, al menos en lo que concierne a la parte fluida que conserva su poder óptico y reflexivo.

## Pedro Nunes

Previamente a la publicación por Risner (1572) de las ópticas de Alhacen y Vitelo junto al pequeño texto *liber de crepusculis*, supuestamente escrito por el primero, Pedro Nunes publicó en Lisboa, en 1542, un tratado acerca de la duración de los crepúsculos. Junto a su obra se adjunta una traducción al latín de Gherardo da Cremona, *causis crepusculorum liber unu*, que también da por legítima la autoría original de Alhacen.

El matemático portugués infiere que el tiempo que emplea el sol en descender hasta los 18 grados bajo el horizonte, varía con la declinación del sol y por tanto con las estaciones. Nunes fue el primero en tratar de evaluar ese periodo. Recurre a los valores de Tolomeo en cuanto a la distancia y volumen del sol. Los datos, próximos a los del árabe, desprenden una superioridad del tamaño de la estrella 4,5 veces mayor que el planeta, mientras que la separación entre ambos es de 1108 veces el radio terrestre, lo que arroja un ángulo subtendido de exterior de planeta a superficie del sol de 14 minutos, corrección que también aplicará sustrayendo a los  $16^{\circ} 2'$  de depresión solar que el luso supone, aunque apuntando que este valor no es constante. Suponiendo que el radio de la tierra es de 39773

estadios (lo más probable es que egipcios, equivalente a 157,3 metros) que fue el valorado por Eratóstenes, en la célebre travesía entre Siena y Alejandría, donde un soldado cuenta los pasos entre ambas ciudades para a partir de las diferencias de la proyección de dos sombras calcular el perímetro de la tierra, el reeditor de la obra, supuestamente de Alhacen, estima que la altura del aire es de 381 estadios, unos 60 Kilómetros.

La obra de Nunes fue muy bien acogida en Europa y contó con el beneplácito de Tycho, entre otros. En la siguiente figura, de la obra de Nunes, se aprecia la distancia angular entre el sol y la tierra y la reflexión del rayo solar en la capa superior de la atmósfera:

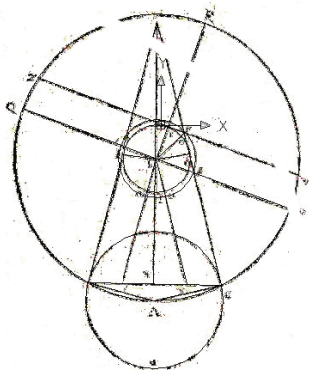


Fig 2: El rayo parte desde la parte exterior del sol, A, penetra en la atmósfera, B, y se refleja en la parte más alta de esta, C, llegando horizontalmente a la tierra en D. Sabiendo el ángulo máximo del crepúsculo y conociendo el valor del radio de la tierra, se deduce la altura del aire.

## El sistema de Kepler

Kepler utilizó otro sistema, basado en la refracción, para calcular el espesor atmosférico. El alemán disponía de las medidas de Tycho, correspondientes a la inclinación del rayo en el suelo y la desviación del rayo en el éter. Hábilmente, el astrónomo incorpora el efecto de la curvatura de la tierra, para distinguir lo que es la inclinación del rayo sobre el suelo y la inclinación del rayo al tocar el aire

(en el diagrama esbozado en el capítulo cuarto de paralipomena están marcados como líneas de color azul) respecto a la línea normal a la separación entre el aire y el éter. Para el caso de la refracción horizontal:

La inclinación en la tierra difiere del ángulo refractado en el aire. Kepler supone que la relación entre estos dos ángulos va en función de los senos siguiendo la fórmula:  $AC \sin i = AE \sin r$ , donde EC es la altitud (desconocida) del aire responsable de la refracción, provocada por algu-

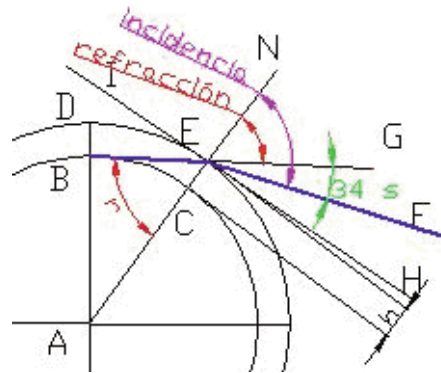


Fig 3: El rayo F proveniente del sol, 34 segundos por debajo del horizonte se refracta al entrar en la atmósfera en E, y aterriza horizontalmente en B. Sabiendo el ángulo de refracción  $r$ , y el radio de la tierra AC, se deduce la altura de la atmósfera CE

na sustancia casi líquida, húmeda y (*gravem*) pesada. Esta distancia es distinta a las 12 millas alemanas deducidas por los ópticos clásicos (Alhacen y Vitelo), que es la elevación donde se produce el crepúsculo, estimulado por una propiedad un tanto árida, fumosa e ígnea (*aridum, fumosum, igneum*), que es material y por tanto susceptible de ser alumbrada y engendrar el crepúsculo, y que se sostiene por encima del aire. Kepler remata sus cálculos resolviendo el siguiente problema: Habiendo dado cuenta de las refracciones, investigar la altitud aérea. Del esquema, se demuestra que:

$$\frac{R_i + h}{R_i} = \frac{10005578}{10000000} = \frac{860 + h}{860} = 1,0005578 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 0.479708 \text{ millas} = 3,46 \text{ Km}$$

La envergadura del aire, la parte que engendra las refracciones, no rebasa la media milla alemana. Más o menos como las más altas montañas. (Buffon objetaría preguntándose el modo en que las águilas vuelan por encima de las altas cimas, no existiendo un fluido donde sostenerse).

Kepler concluye recordando que Rothmann y Pena, astrónomos predecesores de Kepler, aseveraban que entre la tierra y el cielo no existe más que aire y algo de vapor. Tycho está de acuerdo en eliminar el fuego aristotélico y en

admitir los vapores como algo diferente al aire, aunque extiende ese aire hasta los confines de la luna, donde va gradualmente transformándose en éter. La idea de Kepler es la siguiente. Lo que para Tycho son los vapores responsables de la refracción (esa acusada refracción horizontal, fuerte porque el seno apenas varía para ángulos cercanos al recto) para Kepler es aire, por encima de *él fumosae exhalationes*, lámparas del crepúsculo, y después el éter.

El crepúsculo es un fenómeno de reflexión, mientras que entre el aire y el éter se origina únicamente refracción, siendo máxima para el ángulo recto, más allá sería reflexión. Las exhalaciones fumosas reflejan la luz del sol y son lámparas del crepúsculo, mientras el aire (aunque más pesado) sólo refracta el rayo. Ahí radica la distinción para Kepler entre los componentes de la atmósfera: aire refractivo, y vapores reflexivos que aparecen al alba y ocaso.

### Correcciones en el siglo XVIII

Fueron varios autores posteriores a Kepler, los que abordaron el problema de la longitud de la atmósfera utilizando o bien el fenómeno de los crepúsculos, o la refracción. El método clásico de cálculo es el explicado por Al-Jayyani, luego reproducido por Nunes, Halley y otros. No obstante De la Hire (1713, memorias de la academia de Ciencias) y posteriormente Lambert (1760, photometria), introdujeron algunas correcciones.

A la reflexión crepuscular había que incluirle la refracción del rayo al penetrar en la atmósfera. Esta corrección, propuesta por Halley, fue esgrimida por De La Hire. Comienza el científico galo el informe de la academia recordando que es un hecho aceptado que el crepúsculo es un acontecimiento que se verifica cuando el sol se halla a 18° bajo el horizonte. A esta profundidad del astro, la luz incide en la capa superior de la atmósfera y se refleja hasta la tierra, entrando el rayo paralelo a la superficie. Este arco, calculado a partir de la duración del crepúsculo, depende de la extensión del aire en cuestión. Si esta capa fuera más estrecha, la depresión de la estrella no sería tanta. A los 18 grados se debe restar 32 minutos, que es la refracción de la luz al irrumpir en la atmósfera. La segunda enmienda consiste en sustraer otros 16 minutos, correspondiente a la distancia angular de la parte superior del sol, e decir, la que se supone que envía el rayo, ajuste acometido por Alhacen y Pedro Nunes previamente. Por tanto el ángulo restante será de 17°12', que es el que se aplicará para computar la profundidad de aire.

El rayo directo y el reflejado, tangentes a la superficie de la tierra, se cortan en la atmósfera formando un arco de 17°12'. Con la misma construcción geométrica de Al-Jayyani, el coseno de la mitad de este ángulo sería el radio de la Tierra dividido por la hipotenusa integrada por el radio de la tierra junto a la anchura de la atmósfera, arrojando un valor de 72 Km.

Arrojando un valor de 37.223 toesas. El informe recuerda que Kepler desestimó este procedimiento por considerarlo veinte veces superior a lo que creía (que el aire no superaría las montañas más altas).

No obstante, se está considerando a los rayos como rectas, sin alegar que se curvarían debido a la refracción continua que se produce al atravesar capas de aire de distinta densidad. Esta idea, es original de Nicole Oresme, quién en el siglo XIV postuló que un rayo no necesitaría una superficie nítida de separación entre medios para refractarse, sino que la propia variación en la densidad del aire de la atmósfera bastaría para curvar el rayo en una refracción continua.

Esta sería el tercer refinamiento apuntado por Halley después de Oresme: Si suponemos estos dos rayos como una curva, el vértice de la curva, equidistante a las dos extremidades, será el tamaño de la atmósfera, algo menor que la anterior estimación. De la Hire le otorga un valor de 35362 toesas.

### Bouguer: refracción y altura

Bouguer se encomendaba al método de las refracciones. Encontró que la refracción se hacía más acusada según se medía desde el ecuador a los polos, porque el aire frío es más refringente.

El matemático y físico francés, miembro de la Academia de Ciencias de París, zarpó en 1734 para América del Sur en una expedición auspiciada por el gobierno francés al mando del científico Charles Marie de la Condamine. Se aspiraba a refutar las teorías de Newton sobre la forma de la Tierra, computando un grado de arco de meridiano en el Ecuador, mientras un segundo viaje lo valoraba en Laponia, a una latitud próxima al Polo.

Contrastando los cálculos, se formaría una idea ajustada acerca de la apariencia de la Tierra. Bouguer, responsable del contingente científico de la exploración, evaluó la gravedad y la refracción a diferentes cotas y encontró que

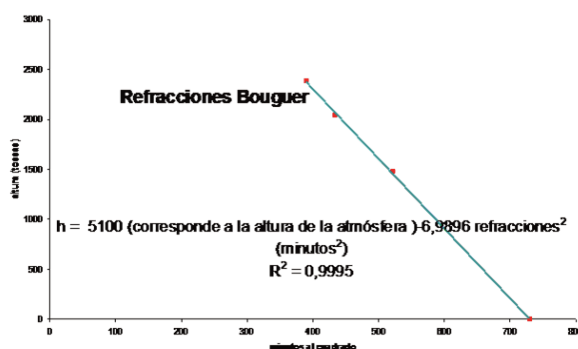


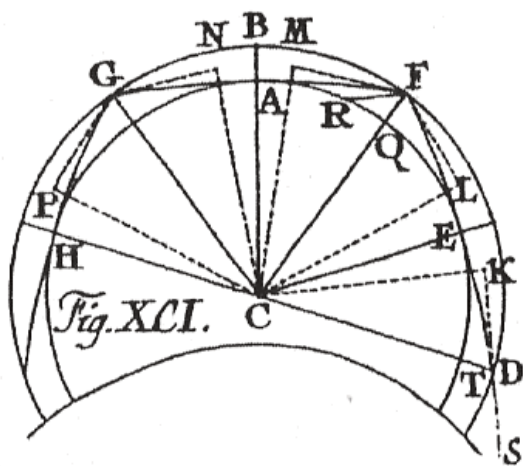
Fig 4: La gráfica representa la refracción medida por Bouguer (el cuadrado de la refracción, expresada en minutos) frente a la altura de la observación. Extrapolando la recta se observa que la refracción se anularía a una altura de 5100 toesas

la refracción horizontal a nivel de mar era de  $27'$  y de  $5'30''$  a  $83'$ . Efectuó medidas en Chimborazo, a 2388 toesas de elevación, encontrando una refracción de  $19'45''$ . En Pitchinca, a 2044 toesas, la refracción incrementaba a  $20'48''$ . En Quito (1479 toesas sobre el océano) era de  $22'50''$ . Encontró que la refracción decrecía con la altura, en la medida de la raíz cuadrada del espesor de aire que la radiación atraviesa, extrapolarlo que a una elevación de 5158 toesas (10 Km) la refracción se anularía.

Si representamos la cota de la medición frente a la refracción al cuadrado obtendremos el calibre de la capa gaseosa (la parte que es refractiva). Se obtiene un valor de 5100 (un 1% de diferencia con respecto al valor de Bouguer) toesas para la dimensión de la atmósfera.

### Lambert: el crepúsculo secundario

Johann Heinrich Lambert en su fotometría introdujo nuevos conceptos. Empieza el capítulo III (parte V) relatando los avances que en esta materia se han logrado. A Varenius le reconoce el haber introducido la doble reflexión en la atmósfera (base de su teoría) y a Halley, el introducir un camino curvo de la luz cuando entra en la atmósfera (como De la Hire). No menciona sin embargo a Alhacen o Al-Jayyani, precursores del modelo.



**Fig 5.** El rayo solar parte de S, penetra en la atmósfera en D, se refleja en F y aterriza en A. Sin embargo se observa un crepúsculo secundario en G, ya que en G se refleja el sol proveniente de F.

Lambert asume que la depresión extrema del sol a la hora del crepúsculo es de  $18^{\circ}30'$ , a la vez que la sabida refracción horizontal de  $32'$ , pero introduce un nuevo concepto, el crepúsculo primario, es decir la ubicación del sol cuando ilumina directamente la atmósfera occidental, y el crepúsculo secundario producido por la reflexión de la luz que proviene del crepúsculo primario.

Si se considera un solo crepúsculo, considerando F el punto que corresponde al sol a los 18 grados y medio por debajo del horizonte, e incorporando no una refracción sino tres, entonces se obtiene una altura atmosférica de 71 Km, que es el dato obtenido por Halley. Ahora bien, si es G el último punto que corresponde a la oscuridad, entonces, engarzando cinco refracciones se obtiene 17, 26 Km.:

No obstante Lambert toma sus propias observaciones en la noche del 19 de noviembre de 1759 en Augsburg, corrigiendo los tiempos de iluminación atmosférica y estableciendo un espesor del aire de 3,9 millas alemanas, cerca de 29 Km.

Hoy en día se sabe que a unos 90 Kilómetros de altura existe una capa en la atmósfera con alto poder de reflexión para las ondas electromagnéticas. No hay un límite claro entre la atmósfera y el espacio exterior debido a que la densidad de la atmósfera decrece gradualmente conforme aumenta la altura. Usando un criterio visualmente perceptible, aproximadamente a los 120 kilómetros se produce la inflamación de los meteoritos debido al rozamiento. Hacia la altura de las estrellas fugaces se observa la aurora boreal, donde la ionosfera actúa como conductor de las partículas cargadas que vienen con el viento solar.

### Bibliografía

**Halley.** *A Discourse of the Rule of the Decrease of the Height of the Mercury in the Barometer, According as Places are Elevated Above the Surface of the Earth, with an Attempt to Discover the True Reason of the Rising and Falling of the Mercury, upon Change of Weather.* Halley: *Philosophical Transactions* (1683-1775), Vol. 16 (1686 - 1692), pp. 104-116 Publicado por The Royal Society.

**Hire.** *Memorias de la Academia de las Ciencias*, año de 1713.

**Kepler.** *Ad Vitellionem paralipomena quibus Astronomia pars optica traditur.* Publicado por Apud Claudium Marnium & Hæredes Joannis Aubrii, 1604. *Joannis Kepleri astronomi opera omnia.* Escrito por Johannes Kepler, Christian Frisch. Publicado por Heyder & Zimmer, 1859 volumen 2.

**William H Donahue.** *Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy.* Publicado por Green Lion Press, 2000.

**Lambert, Johann Heinrich.** *Photometria sive Mensura et gradibus luminis: colorum et umbræ.* Editado por sumptibus vidvæ E. Klett, typis C.P. Detleffsen, 1760.

**Nunes, Pedro.** *Petri Nonii Salaciensis, de crepusculis liber unus: item Allacen Arabis vetustissimi, de causis crepusculorum liber unus, à Gerardo Cremonensi iam olim Latinitate donatus, & per eundem Petrum Nonium denuò recognitus.* 2ª edición. Editado por excudebat Antonius à Marijs, 1571. 63 páginas. El ejemplar utilizado está digitalizado por la Fundación San Millán de la Cogolla.

**Burton, Dan.** *Nicole Oresme's De visione stellarum (On seeing the stars): a critical edition of Oresme's treatise on optics and atmospheric refraction.*