

ENFOQUE VARIACIONAL DEL ANÁLISIS OBJETIVO DE DATOS METEOROLÓGICOS MEDIANTE LA APROXIMACIÓN CON B-SPLINES MULTIVARIANTES

R. D. Ushatov

(Centro de Informática y Tecnología de la Computación, Academia Búlgara de Ciencias)

B. Shefik

(Dep. de Mecánica Teórica, Universidad Técnica, Estambul, TURQUÍA)

C. I. Christov

(Servicio de Predicción Numérica, Instituto Nacional de Meteorología -INM-)

RESUMEN

Se considera la aproximación variacional con B-splines cúbicos multivariantes para funciones conocidas de cuatro variables independientes junto con sus derivadas parciales en un conjunto irregular de puntos. El funcional cuadrático que se minimiza por la función de spline incluye la suma de los residuos ponderados de la función y de sus derivadas parciales y una forma cuadrática de las derivadas segundas (término de suavización). Se desarrolla y comprueba un algoritmo para la manipulación de los pesos. La técnica se aplica al problema del análisis objetivo del campo de geopotencial. Se discute la importancia de la consideración de datos para las componentes del viento (derivadas del geopotencial).

1. Introducción.

El problema de las condiciones iniciales es uno de los temas centrales de la predicción numérica del tiempo. En la atmósfera existe una variedad de movimientos con escalas temporales y espaciales extremadamente diferentes. Todos estos movimientos se describen simultáneamente por las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los fluidos geofísicos (DFG) siendo la escala de la solución dependiente únicamente de la escala

de la condición inicial. Con el fin de aumentar el intervalo temporal para cálculos estables se debe imponer una condición inicial suficientemente suave que contenga solamente los movimientos de gran escala. De esta forma se llega al problema del filtrado de los movimientos de pequeña escala procedentes de los datos observacionales (aerológicos) que es la esencia del procedimiento denominado análisis objetivo. Se analizan objetivamente en meteorología, entre otros, los campos de geopotencial, viento, temperatura, humedad, etc.

Los métodos operativos actualmente utilizados para los análisis objetivos son el de las componentes principales y el de la interpolación óptima (véase, p. ej., Gandin, 1965) que a la vez que sus virtudes obvias exhiben también ciertos inconvenientes. El método de las componentes principales no es suficientemente flexible puesto que está asociado con las autofunciones estacionarias de la matriz de correlación y la parte transitoria con una amplitud considerable eventualmente puede estar pobremente representada. Por su parte, la interpolación óptima carece de precisión en las regiones con escasez de datos debido a la suavización excesiva.

El método variacional introducido por Sasaki (Sasaki, 1958) (véanse también Sasaki, 1970 y Sasaki y Lewis, 1970) estableció el problema de la aproximación con una base más rigurosa. Posee también como principal ventaja el permitir el control de la suavización mediante la minimización de los residuos de las ecuaciones que gobiernan la evolución. El obstáculo que en la formulación, original apareció en su puesta en práctica fue el del requerimiento de que los datos fuesen conocidos en los puntos nodales de la rejilla de cálculo y de aquí que sólo pudiera utilizarse después de que se efectuase previamente otro procedimiento para la regularización de los datos. Este inconveniente se superó en Wahba y Wendelberger (1980) donde se utilizó una aproximación mediante *splines* en el marco del método variacional.

La finalidad de este trabajo es desarrollar una técnica numérica para la aproximación mediante *B-splines* de datos dispersos en 4D. Un desarrollo importante de Wahba y Wendelberger (1980) es la consideración de datos en las derivadas parciales del campo que se va a suavizar. En el caso del campo del geopotencial estas derivadas son los datos de las componentes horizontales del viento. El algoritmo numérico está creado y verificado para el caso 4D, pero los resultados particulares que aquí se mencionan son para el caso 2D del campo de geopotencial en 700 mb sobre el hemisferio Norte en proyección polar estereográfica.

2. *B-splines.*

La definición de un *spline* (véanse, p. ej. Stechkin y Subbotin, 1976, Korneitchuk, 1984) es la de una función que se compone de diferentes funciones en diferentes intervalos (áreas, volúmenes) mediante un ajuste forzado suavemente hasta un cierto orden en las fronteras de los intervalos

(áreas, volúmenes). Nos limitaremos al caso en el que las funciones son polinomios. El mayor de los órdenes de estos polinomios define el orden del *spline*. Es especialmente conveniente la utilización de los denominados *splines-báse* (*B-splines*) que son funciones localizadas del tipo mencionado.

Considérese en el intervalo [a, b] la rejilla regular

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \tag{1}$$

$$x_i = x_0 + (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, M$$

Las fórmulas explícitas para los *B-splines* de tercer orden y defecto 1 se pueden obtener mediante una relación de recurrencia (véase De Boor, en cualquiera de las tres referencias que se citan) que tiene la forma:

$$6h^3 B_i(x) = \begin{cases} 0 & x < x_{i-2} \\ (x-x_{i-2})^3 & x_{i-2} \leq x < x_{i-1} \\ (x-x_{i-2})^2(x-x_i) + (x_{i+2}-x)(x-x_{i-1})^2 + \\ + (x-x_{i-2})(x_{i+1}-x)(x-x_{i-1}) & x_{i-1} \leq x < x_i \\ (x_{i+2}-x)^2(x-x_i) + (x_{i+1}-x)^2(x-x_{i+2}) + \\ + (x_{i+2}-x)(x_{i+1}-x)(x-x_{i-1}) & x_i \leq x < x_{i+1} \\ (x_{i+2}-x)^3 & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ 0 & x \geq x_{i+2} \end{cases} \tag{2}$$

donde el índice se refiere al punto donde se sitúa el máximo de la función de *spline* respectiva, es decir, el máximo de B_i está en el punto x_i . La propiedad esencial de un *B-spline* de tercer orden y defecto 1 es que se trata de una función localizada con derivada segunda continua que toma valores no triviales sólo en el interior del intervalo (x_{i-2}, x_{i+2}) . Sólomente cuatro *B-splines* poseen valores no triviales en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, que son respectivamente los correspondientes a los índices $i-1, i, i+1$ y $i+2$. Obviamente, el conjunto de todos los *B-splines* cúbicos de defecto 1 que no son iguales a cero en el intervalo [a,b], constituye un espacio lineal de dimensión $M+3$. Sin embargo, si consideramos sólomente los denominados *splines* naturales cuyas segundas derivadas son iguales a cero en las fronteras del intervalo [a, b], entonces la base del espacio lineal está representada sólo por $B_0(x), B_1^*(x), \dots, B_{M-1}(x), B_M(x)$ y de esta forma la dimensión del espacio se reduce a $M+1$. Cada miembro S del espacio $(M+1)$ -dimensional de *splines* naturales de tercer orden y defecto 1 se puede representar como una combinación lineal de las funciones base.

Es evidente que todas las funciones cuyos valores funcionales se conocen en un conjunto (generalmente irregular) de $L+1$ puntos en el intervalo $[a, b]$ puede representarse de forma única como una combinación lineal de $L+1$ *B-splines* definidos en dicho intervalo. Ésta es la denominada interpolación (colocación) mediante *splines*. El procedimiento de disposición mediante *splines* como una forma de aproximación (como cualquier procedimiento de interpolación) se enfrenta con el problema de la oscilación del aproximante. Las oscilaciones pueden surgir de errores aparentemente insignificantes en los valores de la función. Por otra parte, en la mayoría de las situaciones con importancia práctica, los datos están prescritos en un conjunto irregular de puntos que exageran excesivamente las dificultades para aplicar la colocación de los *splines*, especialmente el problema de la oscilación. En este caso, de funciones que presumiblemente son bastante suaves, resulta ser que la herramienta adecuada para representarlas es la aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados con *B-splines* (aproximación variacional). Posee dos ventajas principales: en primer lugar, es robusta frente a pequeños errores en el conjunto original de valores de la función y en segundo lugar, proporciona la información en un sistema regular de puntos. Estas dos ventajas son cruciales en meteorología.

3. Planteamiento del problema.

Considérese un rectángulo

$$4D: \Omega = [a_1, b_1] [a_2, b_2] [a_3, b_3] [a_4, b_4]$$

que engloba todos los datos. Hay que destacar especialmente el hecho de que las deducciones que vienen a continuación son válidas para una dimensión arbitraria. El código para el ordenador está adaptado para el caso de 4 argumentos. Considérese la función g supuestamente suave cuyos valores son conocidos, conjuntamente con las magnitudes de sus derivadas parciales espaciales, en un conjunto irregular de puntos:

$$\begin{aligned} \gamma_v &= g(x_v, y_v, z_v, t_v) \\ \tilde{\gamma}_v &= g_x(x_v, y_v, z_v, t_v) \\ \tilde{\tilde{\gamma}}_v &= g_y(x_v, y_v, z_v, t_v), \quad v = 1, \dots, L \end{aligned} \quad [3]$$

El *spline* aproximante S minimiza el funcional [4] que impone un compromiso entre los requerimientos de suavidad y de proximidad a los valores prescritos de la función (y/o derivadas parciales) γ_v . Siendo ρ_v los pesos positivos y α el denominado "factor de suavización", la magni-

tud de α refleja la importancia relativa asignada a los requerimientos contradictorios de suavidad y proximidad. Las aplicaciones meteorológicas precisan de más flexibilidad en la aproximación. Es por esta razón que introducimos, a la vez que el factor general de suavización α , el peso distribuido $\sigma(x, y, z, t)$.

$$\begin{aligned} F[S(x, y, z, t)] = & \int \int \int \int \Omega dx dy dz dt \sigma(x, y, z, t) \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right)^2 \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial t} \right)^2 \left. \right] \\ & + \sum_{v=1}^L \left\{ \rho_v [\gamma_v - S_v]^2 + \tilde{\rho}_v \left[\tilde{\gamma}_v - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_v \right]^2 + \tilde{\tilde{\rho}}_v \left[\tilde{\tilde{\gamma}}_v - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_v \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad [4]$$

Recubrimos Ω con una rejilla uniforme, dividiéndolo en un conjunto de rectángulos 4D. Cada *spline* natural tetradimensional S viene representado únicamente de la siguiente forma

$$S(x, y, z, t) = \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} \sum_{i_4=0}^{M_4} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1}(x) B_{i_2}(y) B_{i_3}(z) B_{i_4}(t) \quad [5]$$

donde el índice i_k se refiere al número de la respectiva función de *spline* 1D (véase el apartado anterior). Denominemos X al vector de todos los coeficientes desconocidos de *spline* en la representación [5]. Obviamente, la dimensión de X es $M = (M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1)(M_4 + 1)$, es decir, los *splines* naturales constituyen un espacio lineal que posee dicha dimensión.

Es conveniente introducir las notaciones

$$\begin{aligned} c^{(1)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B''_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ c^{(2)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B''_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ c^{(3)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B''_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ c^{(4)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B''_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(1)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B'_{i_1}(x_{k_1}) B'_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(2)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B'_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B'_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(3)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B'_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B'_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(4)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B'_{i_2}(y_{k_2}) B'_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(5)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B'_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B'_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(6)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B'_{i_3}(z_{k_3}) B'_{i_4}(t_{k_4}), \end{aligned} \quad [6]$$

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B'_{i_1}(x_{k_1}) B'_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(2)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B'_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B'_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(3)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B'_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B'_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(4)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B'_{i_2}(y_{k_2}) B'_{i_3}(z_{k_3}) B_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(5)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B'_{i_2}(y_{k_2}) B_{i_3}(z_{k_3}) B'_{i_4}(t_{k_4}), \\ d^{(6)}_{j\bar{l}} &= \alpha \sigma_{\bar{l}} B_{i_1}(x_{k_1}) B_{i_2}(y_{k_2}) B'_{i_3}(z_{k_3}) B'_{i_4}(t_{k_4}), \end{aligned} \quad [7]$$

donde $l = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ es un índice 4D del tipo de j . σ_j son respectivamente los coeficientes que aparecen por las fórmulas de cuadratura para los

pesos nodales. Sin embargo, se les puede considerar como pesos nodales discretos que pueden adoptar cualquier valor, incluido $\sigma_j = 0$. Denominemos P al número total de nodos cuyo peso nodal toma valores no triviales.

La aproximación discreta del funcional [4] da lugar al problema de la minimización de la función cuadrática de muchas variables

$$\Phi \equiv [A \cdot X - b]^2 \quad [8]$$

donde A es una matriz con $(M+P)$ columnas y M filas cuyo rango es M . Nótese que debido a la forma localizada de los *B-splines*, los coeficientes c y d son iguales a cero si los componentes respectivos de sus índices difieren en más de 2. Esto quiere decir que la matriz A posee una estructura multibanda. El vector del segundo miembro del sistema

$$b = (\gamma_1, \dots, \gamma_L; \bar{y}, \dots, \bar{y}_L; \tilde{y}, \dots, \tilde{y}_L; 0, \dots, 0) \quad [9]$$

se compone de los valores de la función y de sus primeras derivadas en el conjunto irregular de puntos acoplados por los P ceros. Es obvio, que el rango de A debe ser menor que L para no tener un sistema indeterminado.

La sobredeterminación del sistema, a la que se reduce la minimización de [8], se resuelve por medio del método de *Hausholder* (*Lawson y Hanson, 1974 y 1969*). La discusión de los detalles relativos a la utilización del método de *Hausholder* va más allá del alcance de esta nota.

4. Manipulación de los pesos. Un caso de modelo.

Se ve claramente que el problema que se está considerando posee muchos grados de libertad que se pueden utilizar para sintonizarlo en un problema particular mediante la manipulación de los pesos. Considérese una función analítica F para la que se tiene una expresión analítica. Esto nos permite evaluar a fondo las propiedades de la aproximación. En este caso podemos considerar la distancia entre la función y su aproximante en los puntos nodales de una rejilla regular especialmente definida (no necesariamente coincidente con la rejilla principal). Introducimos las medidas estándar:

$$E_1[F] \equiv \max |F(x_{i_1}, y_{i_2}) - S_{i_1 i_2}| \quad [10]$$

$$E_2[F] \equiv \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} |F(x_{i_1}, y_{i_2}) - S_{i_1 i_2}|$$

donde N_i son los números de líneas de rejilla a lo largo de la coordenada respectiva de una rejilla regular especial que no coincide necesariamente con la rejilla principal y que se introduce sólo con el fin de comparar la función y el aproximante. En nuestros experimentos numéricos se tomó de 21×21 . Las expresiones [10] se denominan distancia uniforme (global) y distancia uniforme promedio, respectivamente.

Por otra parte, tiene una importancia práctica más significativa la medida de la desviación máxima en el conjunto irregular de puntos en los que se dan los datos:

$$E_{\max} = \max |S(x_v, y_v) - F(x_v, y_v)|, v = 1, \dots, L \quad [11]$$

Los pesos asignados a los puntos de datos (pesos de disposición) son útiles cuando suavizan datos presumiblemente ruidosos (*véase, p. ej., Craven y Wahba, 1979*) siendo proporcionales a la inversa del error supuesto en un punto de rejilla dado. Sin embargo, éste no es el único problema en el análisis objetivo. Como se ha mencionado más arriba, puede incluso ser necesario suavizar datos correctos para filtrar procesos de pequeña escala irrelevantes en la escala del movimiento que se va a predecir. Mediante los pesos de disposición intentamos homogeneizar la aproximación. Es evidente que sin ellos (o lo que es lo mismo, con todos los pesos igual a la unidad), la información aportada por los puntos que pertenecen a zonas más densas en datos tendrá más importancia en el algoritmo. La idea, en consecuencia, es tener mayores pesos en aquellas, estaciones que están en un área menos poblada y viceversa.

Sea h_i el espaciado de una rejilla regular en la que construimos el *spline*. Consideremos los dos puntos de datos con coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) respectivamente. Designemos a la distancia entre ellos como la raíz cuadrada del producto escalar:

$$d_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2]^{1/2} \quad [12]$$

Los dos puntos se influyen mutuamente si $d_{12} \leq H$, donde H es la denominada "distancia de influencia". Se toma igual a la mitad del espaciado de rejilla más largo. A continuación calculamos para cada punto x_n el número n_v de puntos que están situados más próximos que H . Debe destacarse que $n_v \geq 1$, puesto que al menos el punto en consideración satisface la mencionada condición. En consecuencia, el peso de disposición respectivo se define como:

$$\rho_v = C_1 + C_2 n_v^{-1} \quad [13]$$

donde las constantes C_1 y C_2 están disponibles para sintonizar el algoritmo en cada caso particular.

Hemos realizado experimentos numéricos con las siguientes funciones:

$$F_1(x, y) = e^{\text{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}, F_2(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad [14]$$

Utilizamos 250 puntos con datos distribuidos de forma aleatoria a lo largo de la región 2D $[-3,3] \times [-3,3]$. La rejilla de cálculo para el *spline* fue de 9×9 . Los resultados con ambas funciones fueron cuantitativamente similares. Se presentan en forma de tabla los de la función F_1 .

La tabla I muestra el efecto de la manipulación con los pesos de disposición en términos de las normas, definidas más arriba, de desviación del aproximante de la función. El signo "=" en el lugar del peso significa que todos los pesos son iguales entre sí. Se consideran dos valores diferentes para el factor de suavizado $a = 0,001$ y $0,05$. También se presentan dos elecciones diferentes para el par de constantes C_1 y C_2 . Se ve que mediante la manipulación de las constantes C_1 y C_2 se puede limitar la desviación máxima a la vez que se retiene el deseable, decrecimiento de la distancia global entre la función y el aproximante. Se observa claramente que la introducción directa de los pesos variables ($C_1 = Q, C_2 = 1$) reduce realmente la distancia entre el aproximante y la función. Desgraciadamente da lugar también a un aumento de la desviación máxima en los puntos en los que el peso es demasiado pequeño. Por esta razón limitamos la variación de los pesos asignando $C_1 = 0,5$ y $C_2 = 0,5$.

Tabla I

C_1, C_2	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5
a	0,001	0,05	0,001	0,05	0,001	0,05
pesos	≠	=	≠	=	≠	=
E_1	0,583	0,896	0,232	0,328	0,268	0,328
E_2	0,078	0,082	0,087	0,071	0,076	0,071
E_{\max}	0,204	0,151	0,202	0,146	0,155	0,146

Podemos especificar a continuación los pesos nodales ajustándolos al número de puntos

con datos presentes en las proximidades de un nodo y a sus pesos de disposición respectivos.

Denominamos "célula elemental alrededor de un nodo" al rectángulo 4D centrado en dicho nodo y con un tamaño las superficies frontera igual al respectivo espaciado de la rejilla. El número medio de puntos con datos es $\kappa = L/N_r$, donde $N_r = M_1 M_2 M_3 M_4$ es el número total de células elementales. Sea ahora β_j el número total de puntos con datos en la célula elemental alrededor del nodo considerado, referido mediante el Índice 4D $j = (i_1, i_2, i_3, i_4)$. A continuación definimos el peso nodal como

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta_j > \kappa \\ Q - \frac{\kappa - \beta_j}{\kappa} & \text{si } 0 < \beta_j \leq \kappa \\ Q & \text{si } \beta_j = 0 \end{cases} \quad [15]$$

Los pesos σ_j así definidos, después de ser multiplicados por el factor global de suavización proporcionan los pesos nodales finales. Hemos realizado experimentos numéricos en el caso 2D con un tamaño de rejilla de 9×9 y $a = 0,05$ y los mismos datos de entrada que en el apartado previo.

La tabla II muestra los resultados para diferentes valores del parámetro Q . En estos experimentos, todos los pesos de los puntos se toman igual a 1. La fila designada por "nodos" proporciona el número de nodos, donde los pesos de suavizado no nulos se prescriben por el algoritmo según el criterio anterior. Se ve que introduciendo los pesos de las variables se obtiene un aumento de la distancia global y una reducción de la desviación máxima.

Tabla II

$a = 0,05$			
Q	0,5	0,75	1,0
nodos	11	25	33
E_1	0,506	0,340	0,400
E_2	0,069	0,072	0,072
E_{\max}	Q125	Q144	0,148

La tabla III presenta el resultado de la utilización combinada de los dos tipos de pesos. Se ve que ambas medidas decrecen. Los experimentos se realizaron para $Q = 1$ que se utilizó además en los cálculos prácticos.

Tabla III

$\alpha = 0,05 ; Q = 1,0$			
C_1, C_2 pesos	=	0,5, 0,5	0,75, 0,5
		≠	≠
E_1	0,400	0,330	0,387
E_2	0,072	0,075	0,072
E_{max}	0,148	0,143	0,139

5. Resultados y discusión.

Limitaremos nuestros experimentos al caso de dos coordenadas espaciales a fin de dilucidar los principales problemas relacionados con la aproximación mediante *splines*. Se considerará proyección estereográfica.

$$x = x_0 + \frac{a_0}{D_m} (1 + \text{sen } \phi_1) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \cos(\phi - \phi_0)$$

$$y = y_0 + \frac{a_0}{D_m} (1 + \text{sen } \phi_1) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \text{sen}(\phi - \phi_0)$$

$$a_0 = 6.371.000 \text{ m}$$

[16]

donde D_m es un factor de escala definido por conveniencia cuando se dibujan los resultados.

El principal problema al aplicar los *B-splines* para el análisis objetivo del campo de geopotencial consiste en el hecho de que dicho campo varía relativamente poco mientras que su valor medio es mayor que sus variaciones. Para el caso seleccionado de 700 mb, el valor medio del geopotencial es del orden de 300 dam mientras que las desviaciones son del orden de 50-60 dam. Además, la parte predominante de su desviación (alrededor de 35 dam) se debe a la tendencia climática latitudinal: el valor más alto (318 dam) se alcanza en el Ecuador y el más bajo (250 dam) en el polo. Para las estructuras sinópticamente importantes del campo de geopotencial (depresiones, anticiclones, dorsales) quedan sólo las desviaciones marginales del orden de 5-30 dam. Lo anterior plantea un grave problema puesto que el algoritmo puede suavizarlos si no se toman medidas especiales. Por lo tanto, sustraemos la mencionada tendencia latitudinal. El perfil climático del geopotencial en función de la latitud puede verse, por ejemplo, en *Belov, 1975*. Hemos intentado incluso considerar la tendencia longitudinal, mucho más sutil, teniendo en cuenta los datos del Atlas de mapas climatológicos para 1950-1969, aunque no

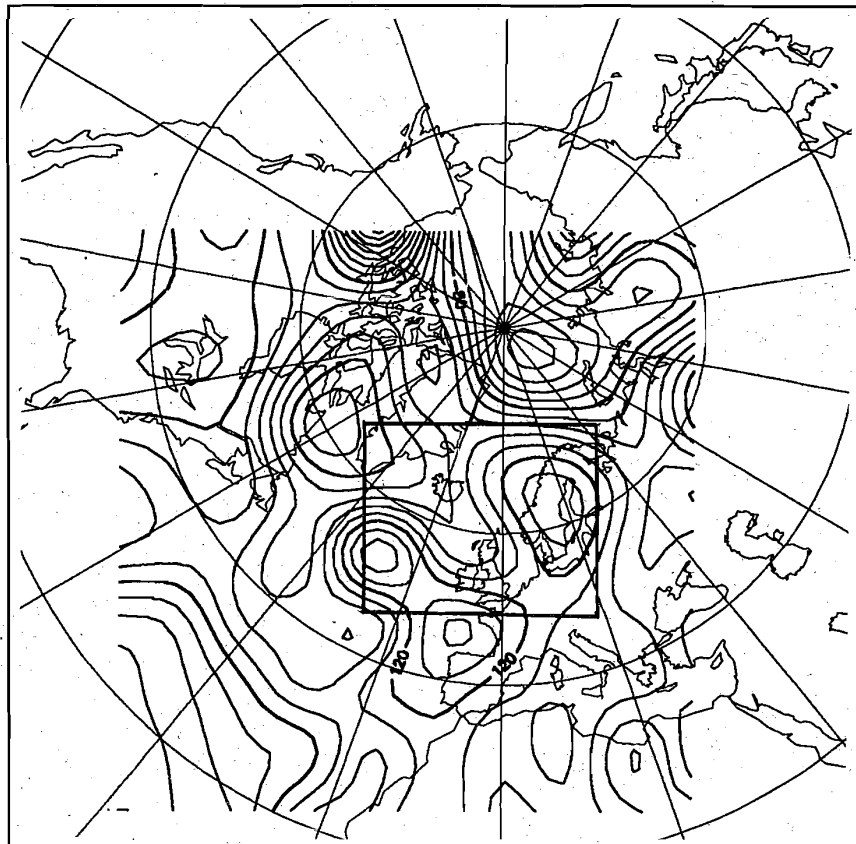


Figura 1

hemos conseguido una mejora significativa de los resultados, es decir, la simple eliminación de la tendencia latitudinal parece ser suficiente.

Utilizamos metros geopotenciales. en lugar de decámetros a fin de aumentar la resolución. El factor de escala D_m se selecciona de forma que se tengan los datos en el rectángulo $[20,80] \times [20,80]$. En la mencionada región se sitúan aproximadamente 600 puntos con datos (la mayoría son las estaciones aerológicas de los EE.UU. y Europa).

La Fig. 1 muestra el resultado de la aplicación de la técnica aquí desarrollada a la parte respectiva del hemisferio Norte. El tamaño de la rejilla es de 9×9 puntos. El principal efecto de suavizado de la aproximación mediante *splines* proviene del tamaño de la rejilla. Sólomente se respetan por la aproximación aquellas estructuras cuyas medidas son al menos del tamaño de las células de rejilla. El empleo de rejillas más finas sin procedimientos de suavizado tampoco es aceptable puesto que pueden aparecer oscilaciones espúreas. También hay otra limitación sobre el

tamaño de la rejilla relacionada con el requerimiento de que el número total de puntos de rejilla no debería exceder del número de puntos con datos. Queda aquí patente la principal ventaja de utilizar datos de viento, puesto que triplica el límite superior para el tamaño de la rejilla.

En la Fig. 2 se presenta el mismo caso que en la Fig. 1, pero para una rejilla de tamaño 21×21 . Aunque los resultados se obtienen sobre la totalidad de la región original, presentamos sólomente las estructuras que caen en el interior de la ventana $[45,70] \times [20,60]$ señalada en la Fig. 1. Las líneas finas se refieren a la aproximación obtenida sin tener en cuenta los datos de viento. Se ve claramente que las estructuras son ahora más elaboradas que en la Fig. 1, lo que quiere decir que el campo está menos suavizado que para el tamaño de rejilla 9×9 . Las líneas más gruesas representan la aproximación para el campo de geopotencial, cuando los datos para sus derivadas espaciales (datos de viento) también se consideran mientras que las magnitudes del resto de los parámetros (tamaño de rejilla, pesos de nodos

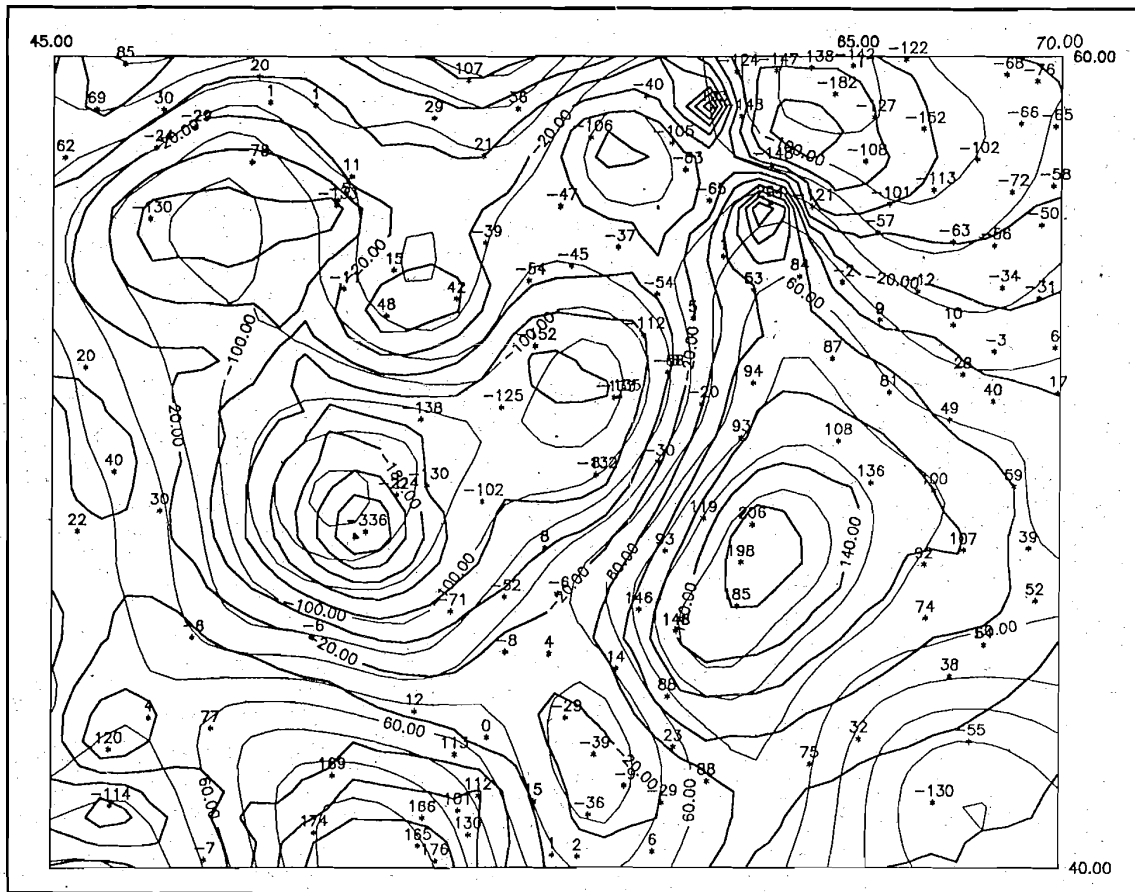


Figura 2

y puntos) se mantienen fijos. Se observa que aparecen detalles adicionales a la vez que el campo permanece razonablemente suave.

Conclusión.

Los resultados del presente trabajo muestran que el enfoque variacional con *B-splines* multivariantes puede ser útil en el análisis objetivo de datos meteorológicos. Mediante la manipulación de los pesos se puede ajustar el esquema a las especificaciones físicas del problema. Las limitaciones sobre los parámetros del esquema se definen mediante una amplia realización de experimentos numéricos. La consideración de los datos de viento resulta en un impacto especialmente beneficioso sobre la aproximación, haciéndola mucho más adecuada para la finalidad física sin aumentar el tamaño de la rejilla.

La aproximación mediante *splines* 4D desarrollada aquí también puede considerarse como un procedimiento de extrapolación en el tiempo. En esta forma puede servir no solamente para proporcionar las condiciones iniciales adecuadas para los modelos numéricos sino también como una herramienta para la predicción a muy corto plazo de la circulación sinóptica.

Agradecimientos.

El último autor agradece la estancia sabática subvencionada por el Ministerio Español de Educación y Ciencia.

Referencias.

Gandin, L.S. (1965). *Objective analysis of meteorological fields*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem. 242 p.

Sasaki, O. (1958). *An objective analysis based on the variational method*. *J. Meteor. Soc. Japan*, 36, 77-88.

Sasaki, O. (1970). *Some basic formalism in numerical variational analysis*. *Moti. Wea. Rev.* vol. 98, núm. 12.

Sasaki, Y.; Lewis, J.M. (1970). *Numerical variational objective analysis of the planetary boundary layer in conjunction with squall line formation*. *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 48, núm. 4, pp. 381-399.

Wahba, G.; Wendelberger, J. (1980). *Some new mathematical methods for variational objective analysis using splines and cross validation*. *Month. Wea. Rev.*, vol. 108, pp. 1.122-1.143.

Stechkin, S.B.; Subbotin, Y.N. (1976). *Splines in numerical mathematics*. Nauka. Moscow. (En ruso).

Korneitchuk, N.P. (1984). *Splines in theory of approximation*. Nauka. Moscow. (En ruso).

De Boor, C. *A practical guide to splines*. Applied Math. Sciences. Springer. New York.

De Boor, C. (1971). *Subroutine package for calculating with B-splines*. Los Alamos Sci. Lnb. Rept. No. LA-4728-ms, 12 p.

De Boor, C. (1972). *On calculating with B-splines*. *J. Approx. Theory*, vol. 6. Núm. 1, pp. 50-62.

Lawson, C.L.; Hanson, R.J. (1974). *Solving least squares problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Lawson, C.L.; Hanson, R.J. (1969). *Extensions and applications of Householder algorithm for solving linear least squares problems*. *Math. of Comp.*, 23. 787-812.

Craven, P.; Wahba, G. (1979). *Smoothing noisy data with spline functions*. *Numer. Math.*, 31, 377-403.

Belov, P. (1975). *Numerical methods for weather prediction*. *Gidrometeoizdat*. Leningrad. (En ruso).