

APLICACIÓN DE REJILLAS ADAPTABLES EN MODELOS DE MESOESCALA PARA LA PREDICCIÓN NUMÉRICA DEL TIEMPO

C. I. Christov
E. Rodríguez
J. A. García-Moya
R. Díaz-Pabón

(Servicio de Predicción Numérica, -INM-)

RESUMEN

Este trabajo tiene que ver con la aplicación de coordenadas curvilíneas adaptables en un modelo barotrópico de 2 dimensiones. Se usan las fórmulas necesarias para la transformación de coordenadas y las ecuaciones del modelo se recalculan en función de coordenadas curvilíneas no ortogonales y dependientes del tiempo. Se emplea un algoritmo para la generación de rejillas elípticas desarrollado en trabajos anteriores de uno de los autores. Se presentan dos modos diferentes de aplicación de las rejillas adaptables. En el primero, las coordenadas curvilíneas están condensadas de manera que mejoran la resolución sobre un área predefinida de la región del flujo. En el segundo modo, las coordenadas evolucionan con el tiempo como resultado del jacobiano modulado por los gradientes del flujo.

1. Introducción.

La exactitud de la predicción numérica del tiempo depende mucho de la rejilla en la que se realizan los cálculos. Por desgracia, la resolución de la rejilla no puede aumentarse mucho debido a limitaciones computacionales. Entonces el problema consiste en cómo aumentar la resolución de la rejilla en determinadas subregiones de interés disminuyéndola en el resto del dominio de cálculo. Esto puede hacerse, o bien introduciendo puntos de rejilla adicionales en el marco del sistema de coordenadas cartesianas, o bien usando coordenadas curvilíneas especiales que se adapten al flujo **a priori** o **a posteriori**. A la primera de estas aproximaciones se la conoce con el nombre de **técnica multirrejilla (multigrid technique)**

(Skamarock, 1991; Fulton y otros, 1986; Altas y Stephenson, 1991). Su principal ventaja es que se usa el sistema de coordenadas original. La limitación es que los cálculos reducen la exactitud de los resultados en las interfases entre las zonas de la rejilla con diferente resolución. A la segunda aproximación se la conoce con el nombre de **rejillas adaptables (adaptive grids)** (Skamarock, 1991). Este método se ha usado mucho durante las últimas dos décadas (ver Thompson y Warsi, 1982; Thompson y otros, 1985; Anderson, 1983) en problemas de mecánica de fluidos. La desventaja de este método es que se aumenta el número de operaciones aritméticas que es necesario hacer en cada punto de rejilla debido a la introducción de coeficientes no constantes en las ecuaciones. La principal ventaja está relacionada con la flexi-

bilidad de la rejilla y la facilidad de ejecución de los algoritmos, esto último está relacionado con el hecho de que la región transformada puede hacerse siempre que sea rectilínea. En este trabajo vamos a considerar la aplicación del método de las rejillas adaptables.

Las rejillas adaptables pueden emplearse en predicción numérica del tiempo de dos maneras principales. Bien introduciendo a priori una rejilla fija no uniforme para mejorar la resolución sobre un área específica del flujo. De este modo podemos tener resoluciones tan grandes como queramos en el área de interés mientras que las condiciones de contorno se imponen tan lejos como queramos de dicho área y en zonas con resolución mucho menor. En la segunda manera la rejilla adaptable evoluciona en el tiempo con el flujo. Hay varias maneras de establecer la correspondencia entre la rejilla y el flujo, pero de hecho, todas tratan de minimizar el error de truncación sobre ciertos funcionales de él (ver *Thompson y Warsi, 1982; Thompson y otros, 1985; Anderson, 1983; Hawken y otros, 1991* para una revisión general y *Skamarock, 1991; Dietachmayer y Droegemeier, 1992; Adams y otros, 1992*; para una revisión de la aplicación a la predicción numérica del tiempo). En este trabajo vamos a seguir la idea de *Christov, 1982*, de mantener el jacobiano de la transformación de coordenadas aproximadamente proporcional a la norma de los gradientes del flujo y a hacer uso del algoritmo desarrollado en las tres referencias bibliográficas de *Christov (1982, 1992 y 1993)*. Se presentan resultados tanto para rejillas adaptables fijas como móviles.

2. El modelo barotrópico.

Para poder estudiar los problemas relacionados con la aplicación de las rejillas adaptables en la predicción numérica del tiempo es conveniente no complicar demasiado el modelo, elegido inicialmente. Por esta razón consideramos aquí el modelo barotrópico bidimensional sobre una esfera (ver por ejemplo *Haltiner y Willinms, 1980*). Para este modelo la ecuación del momento toma la forma

$$\left(\frac{a\pi}{180}\right)^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} \right] + 2\Omega \frac{\partial \sin \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad [1]$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \tan \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]; \quad \varphi = \pi y / 180 \quad [2]$$

donde "y" y "x" son, respectivamente la latitud y la longitud medidas en grados. Las componentes de la velocidad están relacionadas con la función de corriente a través de las siguientes relaciones estándar

$$U = -\frac{180}{a\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad [3]$$

$$V = \frac{180}{a\pi} \cos^{-1} \frac{\pi y}{180} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Introduciendo la vorticidad total reescribimos la ecuación del momento en la forma

$$\left(a^2 \cos \frac{\pi y}{180}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{D(\Psi, \zeta)}{D(x, y)} = 0$$

$$\zeta = \nabla^2 \Psi + 2\Omega \sin \frac{\pi y}{180} \quad [4]$$

Para no alargar este trabajo no citaremos aquí la forma exacta de la discretización en diferencias finitas usada para la implementación del modelo barotrópico. Es suficiente mencionar que seguimos la implementación de *Krishnamurthi, 1989* y *Haseler y Burridge, 1977*, haciendo los cambios necesarios para la transformación de coordenadas. Los hechos principales de la implementación son la llamada diferenciación de Arakawa (ver *Haltiner y Williams, 1980 -pág. 191- y Arakawa, 1966*) y el esquema de convergencia iteracional implícito para la ecuación de la función de corriente.

3. Transformación de coordenadas.

Consideremos la siguiente transformación general de coordenadas

$$x = x(\xi, \eta; t), \quad y = y(\xi, \eta; t) \quad [5]$$

Las funciones X y Y son funciones compuestas de las coordenadas curvilíneas ξ y η , es decir

$$\zeta(x, y; t) = \zeta[x(\xi, \eta; t), y(\xi, \eta; t); t] \quad [6]$$

Entonces para las derivadas espaciales de primer orden podemos escribir

$$\zeta_x = \frac{y_\eta}{J} \zeta_\xi - \frac{y_\xi}{J} \zeta_\eta, \quad \zeta_y = \frac{x_\xi}{J} \zeta_\eta - \frac{x_\eta}{J} \zeta_\xi, \quad J = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \quad [7]$$

donde J es el llamado jacobiano de la transformación de coordenadas. Por otra parte, la derivada

temporal en función de las nuevas coordenadas es

$$\zeta_t = \zeta_i + \frac{-x_t y_\eta + y_t x_\eta}{J} \zeta_\xi + \frac{x_t y_\xi + y_t x_\xi}{J} \zeta_\eta \quad [8]$$

Teniendo en cuenta que las mismas expresiones son válidas para las derivadas parciales de Y la ecuación del momento puede reescribirse como sigue

$$a^2 \cos \frac{\pi y}{180} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{x_t}{J} \frac{D(y, \zeta)}{D(\xi, \eta)} - \frac{y_t}{J} \frac{D(x, \zeta)}{D(\xi, \eta)} \right] + \frac{1}{J} \frac{D(\Psi, \zeta)}{D(\xi, \eta)} = 0 \quad [9]$$

En cuanto a las derivadas segundas espaciales de la función de corriente con respecto a las coordenadas curvilíneas tenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{y_\eta}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{y_\eta}{J} \Psi_\xi - \frac{y_\xi}{J} \Psi_\eta \right) - \frac{y_\xi}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_\eta}{J} \Psi_\xi - \frac{y_\xi}{J} \Psi_\eta \right) \quad [10]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{x_\eta}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{x_\eta}{J} \Psi_\xi - \frac{x_\xi}{J} \Psi_\eta \right) - \frac{x_\xi}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_\eta}{J} \Psi_\xi - \frac{x_\xi}{J} \Psi_\eta \right) \quad [11]$$

De acuerdo con esto el laplaciano toma la forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^2 \frac{H_\eta^2 \Psi_{\xi\xi} + H_\xi^2 \Psi_{\eta\eta} - 2D\Psi_{\xi\eta} + A\Psi_\xi + B\Psi_\eta}{J^2 \cos^2 \varphi} \quad [12]$$

donde

$$H_\xi^2 = x_\xi^2 + y_\xi^2 \cos^2 \varphi, \quad H_\eta^2 = x_\eta^2 + y_\eta^2 \cos^2 \varphi, \\ D = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \cos^2 \varphi \quad [13]$$

$$A = J \left[y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y_\eta}{J} - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{y_\eta}{J} - x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{x_\eta}{J} + x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x_\eta}{J} \right] + J \cos \varphi \sin \varphi x_\eta \quad [14]$$

$$B = J \left[y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y_\xi}{J} + y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{y_\xi}{J} + x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{x_\xi}{J} - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x_\xi}{J} \right] - J \cos \varphi \sin \varphi x_\xi \quad [15]$$

4. Diferentes esquemas para la generación de rejillas.

Varias técnicas diferentes para la generación numérica de rejillas adaptables se encuentran actualmente en la literatura científica. Como no es

el papel de este pequeño trabajo discutir las, haremos uso del siguiente generador elíptico de rejillas

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} f = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} f \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} f \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad [16]$$

$$f = f(x, y; t)$$

donde la función $f(x, y; t)$ es la que queremos que gobierne la rejilla. Para detalles sobre el método, el lector puede consultar cualquiera de las tres referencias bibliográficas de *Christov (1982, 1992 y 1993)* donde se detalla la técnica numérica usada aquí. En este trabajo es suficiente mencionar que en las regiones donde la función f toma valores grandes, el jacobiano de la rejilla resultante es pequeño y viceversa (*ver Christov, 1982*). El uso del generador elíptico provee la suavización necesaria de la rejilla resultante.

Consideremos el caso en el que la región rectangular del LAM del INM

$$x_1 = -60^\circ, \quad x_2 = 28^\circ, \quad y_1 = 21^\circ, \quad y_2 = 65^\circ \quad [17]$$

se remapea en un cuadrado unidad. Entonces las líneas de contorno son simplemente las siguientes

$$x = x_1, x_2 \quad \text{para } \xi = 0, 1 \quad [18]$$

$$y = y_1, y_2 \quad \text{para } \eta = 0, 1$$

Estas líneas están acopladas por la condición de que las líneas coordenadas deben ser perpendiculares a los contornos, es decir

$$y_\xi = 0 \quad \text{para } \xi = 0, 1 \quad [19]$$

$$x_\eta = 0 \quad \text{para } \eta = 0, 1$$

Siguiendo *Christov 1982, 1992 y 1993*, resolveremos el problema de contorno planteado introduciendo derivadas temporales en las dos ecuaciones y aplicando un esquema implícito para la discretización de las derivadas temporales. Para una función general x sería

$$\frac{\tilde{x}_{ij} - x_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_{\xi\xi} \tilde{x}_{ij} + \Lambda_{\eta\eta} x_{ij}^n; \quad x_{ij}^{n+1} - \tilde{x}_{ij}^n = \Lambda_{\eta\eta} (x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n) \quad [20]$$

donde $\Lambda_{\xi\xi}$ y $\Lambda_{\eta\eta}$ se fijan dependiendo de las diferentes aproximaciones de los operadores diferenciales de segundo orden en la ecuación [16].

Cuando la rejilla permanece fija el algoritmo particular de iteración no es importante debido a que la solución se usa solamente después de que se alcanza la convergencia. Entonces la razón principal para usar un esquema implícito absolutamente estable es tener un margen de estabilidad para el caso en el que la rejilla evolucione con el tiempo y así no tener que imponer limitaciones adicionales (y más restrictivas) sobre el paso de tiempo que las impuestas por el esquema de la ecuación de la vorticidad.

El sistema [16] se resuelve sobre una rejilla escalonada uniformemente (ver Figura 1) sobre el plano $O\xi\eta$:

$$\xi_{i-1/2} = (i-1,5)h_1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, M+1; \quad h_1 = 1/M \quad [21]$$

$$\eta_{j-1/2} = (j-1,5)h_2, \text{ para } j = 1, 2, \dots, N+1; \quad h_2 = 1/N \quad [22]$$

Aquí M y N son, respectivamente, los números totales de líneas de rejilla en las direcciones ξ y η .

Se usan las diferencias estándar simétricas de tres puntos, es decir

$$\begin{aligned} \Lambda_{\xi\xi} \phi_{i+1/2, j+1/2} &= \\ &= \frac{1}{h_1^2} [f_{i,j+1/2} \phi_{i-1/2, j+1/2} - (f_{i,j+1/2} + f_{i+1, j+1/2}) \phi_{i+1/2, j+1/2} + f_{i+1, j+1/2} \phi_{i+3/2, j+1/2}] \end{aligned} \quad [23]$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\eta\eta} \phi_{i+1/2, j+1/2} &= \\ &= \frac{1}{h_2^2} [f_{i+1/2, j} \phi_{i+1/2, j-1/2} - (f_{i+1/2, j} + f_{i+1/2, j+1}) \phi_{i+1/2, j+1/2} + f_{i+1/2, j+1} \phi_{i+1/2, j+3/2}] \end{aligned} \quad [24]$$

Entonces en cada uno de los semipasos de tiempo [20] se reduce a un sistema algebraico lineal tridiagonal que se resuelve por medio de la eliminación gaussiana.

5. Resultados. La rejilla fija.

Como hemos mencionado antes, la primera manera de aplicar el método de la generación de rejillas es crear una rejilla fija que sea más densa en una cierta subregión del dominio principal.

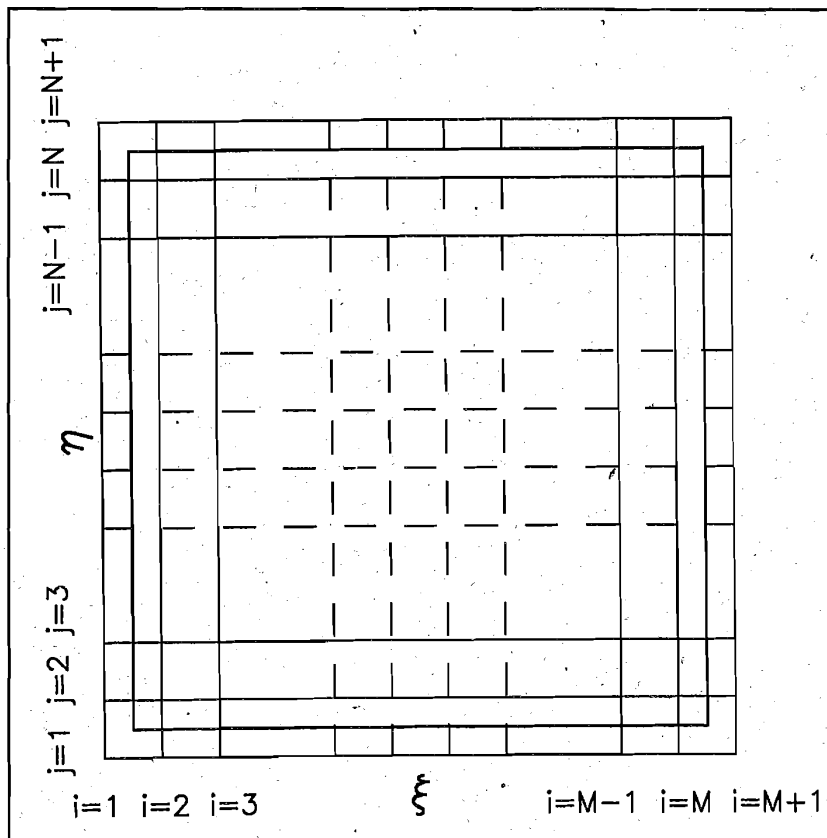


Figura 1

Cuando la rejilla no cambia con el tiempo, el problema de la generación de ésta se desacopla del problema ainámico. En tanto que se cumple esta condición puede construirse un esquema de discretización conservativo en coordenadas curvilíneas generales. La única diferencia es que, a diferencia del caso cartesiano, las cantidades que se conservan aquí son integrales de la vorticidad o de su cuadrado más complicadas que en el caso cartesiano (el coeficiente de la derivada temporal en la ecuación [4] es el que marca la diferencia).

En este caso el problema de la generación de la rejilla se resuelve sólo una vez al principio de los cálculos y el tiempo en [20] se convierte en un parámetro iterativo y las iteraciones se continúan hasta que se alcanza la convergencia de acuerdo con el siguiente criterio

$$\max_{ij} \left[\frac{\|x_{ij}^{n+1} - x_{ij}^n\|}{\|x_{ij}^{n+1}\|}, \frac{\|y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n\|}{\|y_{ij}^{n+1}\|} \right] < 10^{-7} \quad [25]$$

El valor óptimo del paso de tiempo depende en general de la función f . Su valor numérico se selecciona en cada caso de acuerdo con experimentos numéricos. De acuerdo con éstos seleccionamos la función $f(x, y)$ de la forma

$$f(x, y; t) = 1 + \gamma \left[1 + a \left(\frac{x - x_c}{x_2 - x_1} \right)^2 + \alpha \left(\frac{y - y_c}{y_2 - y_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad [26]$$

que da una transición suficientemente suave de las coordenadas desde las grandes células a las

pequeñas. Está claro que x_c e y_c son las coordenadas del centro y el perímetro a define aproximadamente el radio del círculo dentro del cual se consideran los valores de f y las líneas coordenadas deben ser más densas. La medida cuantitativa para la densidad de líneas coordenadas es el parámetro γ .

El resultado para el caso de España ($x_c = 4^\circ$, $y_c = 40^\circ$, $a = 13''$) se muestra en la Figura 2. Para dar una idea de la exactitud de la aproximación hecha presentamos en la Figura 2 las soluciones para dos tamaños de rejilla diferentes. El primero obtenido con $M=21$ y $N=11$ (líneas más gruesas) y el segundo con $M=81$ y $N=41$ (líneas más delgadas). Se puede ver que los resultados son prácticamente indistinguibles, lo que significa que la aproximación del esquema de discretización converge hacia la solución del problema diferencial.

6. Resultados. La rejilla dependiente del tiempo.

Ya hemos demostrado antes que cuando permitimos que la rejilla varíe con el tiempo la transformación de coordenadas afecta también a los términos advectivos de la ecuación del momento. A pesar de que esto complica el problema aún podemos aplicar el esquema de Arakawa a cada uno de los jacobianos que aparecen en la ecuación de transformación. Desgraciadamente, el esquema

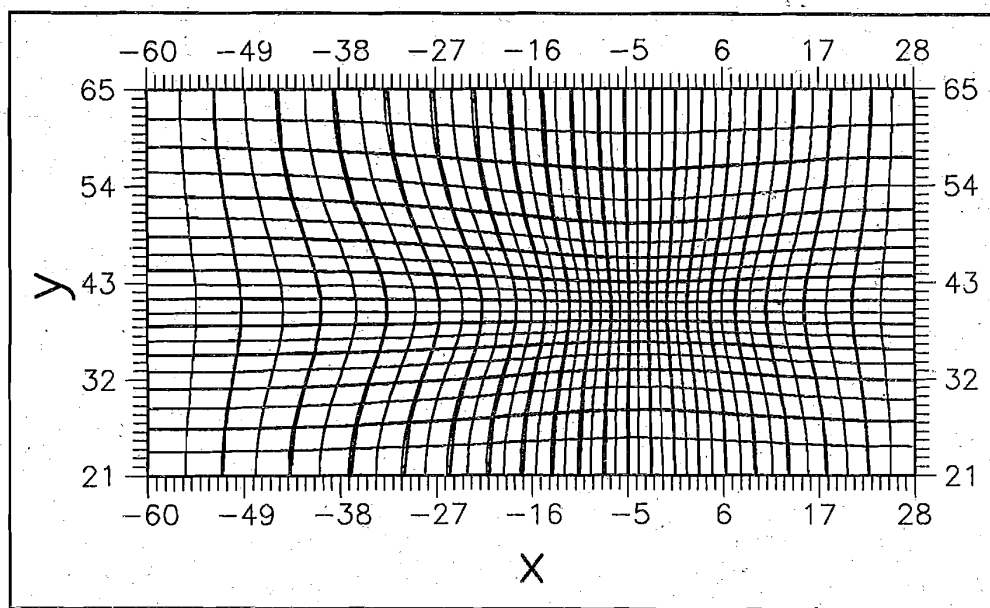


Figura 2

ahora no es estrictamente conservativo, y lo es cada vez menos cuando las funciones coordenadas x e y se tienen en cuenta. No obstante, no es el tema de este trabajo construir un esquema estrictamente conservativo, por lo que usaremos cualquier clase de esquema para estudiar los problemas relacionados con la generación de rejillas.

Ahora lo primero es establecer la regla de correspondencia entre la función f de [16] y cierto funcional de la solución que refleje el criterio deseado de condensación de la rejilla. Hay varias maneras de establecer el citado criterio. La idea principal es que para minimizar el error de truncación del esquema deberíamos definir f aproximadamente proporcional a ese error. El problema es que la expresión del error de truncación es complicada e incluye derivadas de orden alto. Por esta razón, es más práctico ajustar la rejilla a los gradientes de la solución, es decir, a las derivadas de primer orden. Por lo tanto, definiremos la función de gobierno proporcional a la pendiente de la función de corriente

$$f(x, y; t) = 1 + \gamma \sqrt{\Psi_x^2 + \Psi_y^2} \equiv 1 + \gamma \frac{\sqrt{H_\eta^2 \Psi_\xi^2 + H_\xi^2 \Psi_\eta^2 - 2 D \Psi_\xi \Psi_\eta}}{J \cos \phi} \quad [27]$$

donde los coeficientes métricos H_ξ, H_η , el jacobiano J y la condición de ortogonalidad D se han definido antes. El algoritmo se ha implementado de una manera explícita y las cantidades citadas se toman del paso de tiempo anterior. Esto hace que las coordenadas estén desfasadas respecto de la dinámica. Cuantitativamente hablando esto no es importante ya que la correspondencia entre las zonas con líneas coordenadas más densas y las regiones con gradientes altos no es absoluta sino que hay que llegar a un compromiso entre el hecho de que se satisfaga cuantitativamente [27] y la deseada suavización de la rejilla resultante.

Nótese que el gradiente de la función de corriente en [27] se toma con respecto a las antiguas coordenadas (que son las cartesianas). No podría tomarse respecto de las nuevas coordenadas ya que la situación ideal se alcanza cuando los gradientes (o lo que es lo mismo, la pendiente en dos dimensiones) de Y con respecto a las nuevas coordenadas se mantenga casi constante.

Los valores numéricos de la función de corriente normalizada son del orden de 600 y en este caso su pendiente es del mismo orden. Los experimentos numéricos muestran que los mejores resultados se obtienen cuando γ varía entre 0,01 y 0,1. Para $\gamma < 0,01$ la rejilla no se ve significativamente afectada por los gradientes de la función, mientras que para $\gamma > 0,01$ no es suficientemente suave.

En las Figuras 3 y 4 se muestran los resultados para la rejilla dependiente del tiempo. La Figura 3 se refiere a la predicción de 24 horas de la función de corriente, mientras que la Figura 4 se refiere al resultado para 72 horas de predicción. En las dos gráficas superiores pueden verse las isolíneas del campo de la función de corriente (nótese que los valores numéricos están normalizados de acuerdo con *Krishnamurthi*, 1989, y no son iguales a los valores respectivos del geopotencial). En los gráficos inferiores se presentan las rejillas calculadas para $\gamma = 0,02; 0,05; 0,1$; respectivamente.

Conclusiones.

Los resultados del presente trabajo muestran que la aplicación de coordenadas curvilíneas fijas en un modelo de predicción numérica del tiempo es razonable en el sentido de que se mejora significativamente la resolución sobre un área determinada con un coste marginal en términos de tiempo de cálculo. Además, añadir la coordenada vertical a cada punto del sistema horizontal curvilíneo adaptado permite una generalización a tres dimensiones. No obstante, la experiencia en cuanto a eficiencia de cálculo de la introducción de una rejilla variable con el tiempo no es inequívoca para modelos barotrópicos en dos dimensiones. Los gradientes horizontales de la función de corriente a gran escala no son suficientemente grandes para justificar el tiempo de cálculo necesario para recalcular la nueva rejilla en cada paso de tiempo. Está claro, no obstante, que la última conclusión puede cambiar drásticamente si, por ejemplo, un frente en tres dimensiones pudiera ser adecuadamente representado por la rejilla variable.

El primer autor agradece la estancia sabática proporcionada por el Ministerio de Educación y Ciencia de España.

III SIMPOSIO NACIONAL DE PREDICCIÓN

Referencias.

- Skamarock, W.C. (1991). Adaptive grid methods for numerical weather prediction. In proc. "Numerical methods in atmospheric models", 9-13 September 1991. ECMWF, Reading, UK. Vol. 1, pp. 161-190.
- Fulton, S.R.; Ciesielski, P.E.; Sclibert, W.H. (1986). Multigrid methods for elliptic problems: a review. *Monthly Wea. Rev.* Vol. 114, pp. 943-959.
- Altas, I.; Stephenson, J.W. (1991). A two-dimensional adaptive mesh generation method. *J. Comput. Phys.* Vol. 94, pp. 201-224.
- Thompson, J.F.; Warsi, Z.U.A. (1982). Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations - a review. *J. Comp. Phys.*, vol. 47, pp. 1-108.
- Thompson, J.F.; Warsi, Z.U.A.; Mastin, C.W. (1985). *Numerical grid generation: Foundations and applications*. North Holland, 483 p.
- Anderson, D.A. (1983). Adaptive grid methods for partial differential equations, in: "Advances in grid generation", K.N. Ghia and U. Ghia, eds. New-York, pp. 1-120.
- Hawken, D.F.; Gottlieb, J.J.; Hansen, J.S. (1991). Review of some adaptive node movement techniques in finite-element and finite-difference solutions of partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, vol. 95, pp. 254-302.
- Dietachmayer, G.S.; Droegemeier, K.K. (1992). Application of continuous dynamic grid adaptation techniques to meteorological modeling. Part I: Basic formulation and accuracy. *Monltz. Wea. Rev.*, vol. 120, pp. 1675-1722.
- Adams, J.; García, R.; Cross, B.; Hack, J.; Haidvogel, D.; Pizzo, V. (1992). Applications of multigrid software in the atmospheric sciences. *Month. Wea. Rev.*, vol. 120, pp. 1447-1458.
- Christov, C.I. (1982). Orthogonal grids with manageable jacobians, in "Numerical grid generation". J. Thompson. Ed. Elsevier, pp. 897-904.
- Christov, C.I. (1992). Canonical adaptive grids: orthogonality versus smoothness. Paper in preparation.
- Christov, C.I. (1993). Numerical generation of adaptive canonical grids. To be presented on the 2nd USA Congress on Computational Mechanics. Washington, D.C. 16-18 August 1993.
- Haltiner, G.J.; Williams, R.T. (1980). *Numerical prediction and dynamic meteorology*. John Wiley & Sons. New York, 477 p.
- Krishnamurthi, T.N. (1989). Libro de ejercicios sobre predicción numérica del tiempo en los trópicos para la formación del personal meteorológico de clase I y II, OMM, núm. 669.
- Haseler, J.; Burridge, D. (1977). Documentation for the ECMWF grid point model. Internal Report no. 9. Research Dept. of ECMWF.
- Arakawa, A. (1966). Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. *J. Comput. Physics*, vol. 1, pp. 119-143.