

PARAMETRIZACIONES, PREDECIBILIDAD Y MODELO DE LORENZ

E. Rodríguez
J.A. García-Moya

(Servicio de Predicción Numérica, -INM-)

RESUMEN

Las parametrizaciones de los procesos físicos se incorporan en los modelos vía términos adicionales que, modifican las tendencias de las ecuaciones puramente dinámicas y termodinámicas. En este trabajo se estudia el papel que juega la adición de términos, similares a los que aparecen en las parametrizaciones de los procesos físicos más habituales, en las ecuaciones de Lorenz. Se analiza el comportamiento de los invariantes del sistema modificado, la existencia de regímenes, el tiempo medio de permanencia en cada uno de ellos, etc. En un sistema caótico dada su extrema sensibilidad frente a las condiciones iniciales, el estudio de la predecibilidad para integraciones largas pasa por un conocimiento de los atractores y de sus características. La predecibilidad en este caso se estudia mediante una descripción de los estados en los que preferentemente está el sistema.

1. Introducción.

Las parametrizaciones de los procesos físicos han jugado un papel esencial en la modelización de la atmósfera, incorporando en los modelos bien **mecanismos complejos**, como por ejemplo los procesos radiativos, de una forma simplificada sin aumentar el número de variables y ecuaciones que describen la evolución de la atmósfera, o bien la **interacción promediada** de las escalas no explícitamente resueltas por la rejilla utilizada para resolver numéricamente las ecuaciones.

La diversidad y el grado de complejidad de los esquemas existentes de parametrizaciones es muy variable, dependiendo la elección de los algoritmos más adecuados principalmente del al-

cance de la integración en el que se está interesado. En términos generales, para la predicción a corto plazo es más importante disponer de unas condiciones iniciales precisas que de unos esquemas de parametrización que posean gran detalle y complejidad. Para dicho alcance (1-2 días), algunos de los procesos físicos no son especialmente relevantes y pueden simularse utilizando esquemas muy simples o incluso pueden directamente obviarse. Por el contrario, a medida que se aumenta el rango de las integraciones, los procesos físicos, y especialmente la radiación, la convección y los intercambios superficiales de humedad, calor y cantidad de movimiento, determinan crucialmente la climatología del modelo. Para tales integraciones a largo plazo es decisivo incorporar en el modelo representaciones de dichos procesos tan fieles como sea posible.

A medida que nos movemos en el campo de las integraciones climáticas, entramos en el dominio correspondiente del comportamiento asintótico de las ecuaciones diferenciales. Las **características a largo plazo de las soluciones dependen críticamente de las ecuaciones**, esto significa que términos adicionales de las ecuaciones, correspondientes a las parametrizaciones de ciertos procesos físicos, que pueden considerarse como perturbaciones en el corto plazo, pudieran jugar un papel decisivo cambiando las propiedades topológicas de las soluciones, siendo tal efecto solamente apreciable en el largo plazo.

Llegados a este punto, surge de forma totalmente natural la siguiente pregunta: ¿Cuánto estamos cambiando las soluciones cuando añadimos a las ecuaciones términos correspondientes a los diferentes procesos físicos? o incluso, ¿son estos cambios en las soluciones apreciablemente diferentes para los esquemas alternativos correspondientes a un mismo proceso?. Desde un punto de vista puramente matemático, lo que estamos tratando aquí es el problema de las propiedades asintóticas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales cuando añadimos términos adicionales a las ecuaciones.

2. El modelo de Lorenz.

Las ecuaciones de Lorenz se obtienen a partir de las ecuaciones de *Saltzman (1962)*, que modelizan una capa de fluido bidimensional, de altura uniforme (H), con una diferencia de temperaturas entre la superficie superior e inferior (T) que se mantiene constante:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^2 \Psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad [1]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\Psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta$$

donde Ψ es la función de corrientes para el movimiento bidimensional, θ es la desviación de la temperatura de la variación lineal que tiene lugar en el estado de no convección, y las constantes g , α , ν , y κ son, respectivamente, la aceleración de la gravedad, el coeficiente de expansión térmica, la viscosidad cinemática y la conductividad térmica.

Si se desarrollan las variables Ψ y θ en serie doble de Fourier para las variables x y z y se sustituye en las ecuaciones anteriores, se obtienen unas ecuaciones diferenciales ordinarias para los componentes espectrales de las dos variables físicas. Se observa que, en ciertos casos, al

integrar las componentes, todas tienden a cero salvo tres de ellas, y estas tres variables experimentaban fluctuaciones irregulares, aparentemente no periódicas. Las tres ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes a estos tres modos son las ecuaciones de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y, z) = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= Y(x, y, z) = -xz + rx - y \\ \dot{z} &= Z(x, y, z) = xy - bz \end{aligned} \quad [2]$$

en estas ecuaciones x es proporcional al movimiento convectivo, y es proporcional a la diferencia de temperaturas entre las corrientes ascendente y descendente, y z es proporcional a la distorsión del perfil de temperatura vertical de la linealidad.

A las constantes que aparecen en las ecuaciones se les asignan habitualmente los siguientes valores en función de las constantes físicas:

$$\sigma = 10,0; r = 28,0; b = 8/3 \quad [3]$$

La divergencia en el espacio de fases es:

$$\nabla \cdot \vec{x} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) \quad [4]$$

Como es constante y de valor negativo, los volúmenes en el espacio de fases se reducen a cero.

Las tres ecuaciones del modelo de Lorenz para valores adecuados de los parámetros r , σ , b se han considerado como paradigma de los sistemas caóticos desde que fue inicialmente deducido por *Lorenz (1963)*. Las similitudes entre dicho sistema y la atmósfera real son notables.

Algunos autores (*Molteni y otros, 1992; Palmer, 1992*) han señalado recientemente que el comportamiento de la atmósfera caótica extratropical acoplada con la SST tropical puede simularse satisfactoriamente mediante el modelo de Lorenz acoplado con un oscilador lineal bidimensional. A la componente tropical se le asigna una frecuencia propia que es igual al modo interno dominante de la variabilidad a gran escala de los trópicos; la frecuencia de *Madden-Julian (1971)*.

Tanto la atmósfera real como el sistema de Lorenz poseen una curiosa **mezcla de comportamiento caótico como determinista**. El comportamiento caótico surge de la extrema sensibilidad, común

a todos los sistemas no lineales, frente a las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales que impone en la práctica un límite a la predecibilidad en el sentido clásico. La **dispersión de las trayectorias asociadas a un conjunto de condiciones iniciales "próximas" es una medida de la predecibilidad** del sistema para unas condiciones iniciales dadas y para un cierto alcance de la integración (véase en este mismo volumen *García-Moya y otros, 1992*, y las referencias allí contenidas).

Las Figuras 1a, 1b y 1c muestran cómo la dispersión depende críticamente de la posición de las condiciones iniciales: hay unas condiciones iniciales más predecibles que otras. Por otra parte las Figuras 2a y 2b muestran que el método de la dispersión de las condiciones iniciales posee una validez limitada a intervalos de integración relativamente cortos, pasado cierto umbral de tiempo las trayectorias barren zonas muy extensas del espacio de fases.

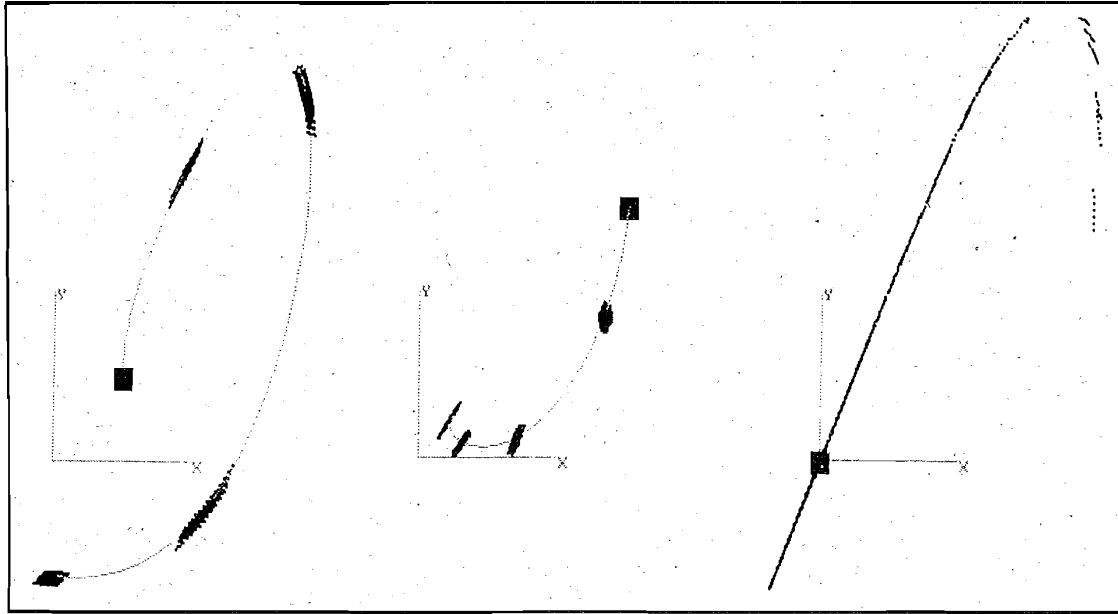


Fig. 1.- Dispersión de las condiciones iniciales en el sistema de Lorenz para diferentes posiciones de las condiciones iniciales en el espacio de fases. a) $(5,0; 5,0; 5,0)$, b) $(15,0; 15,0; 25,0)$, c) $(0,0; 0,0; 0,0)$

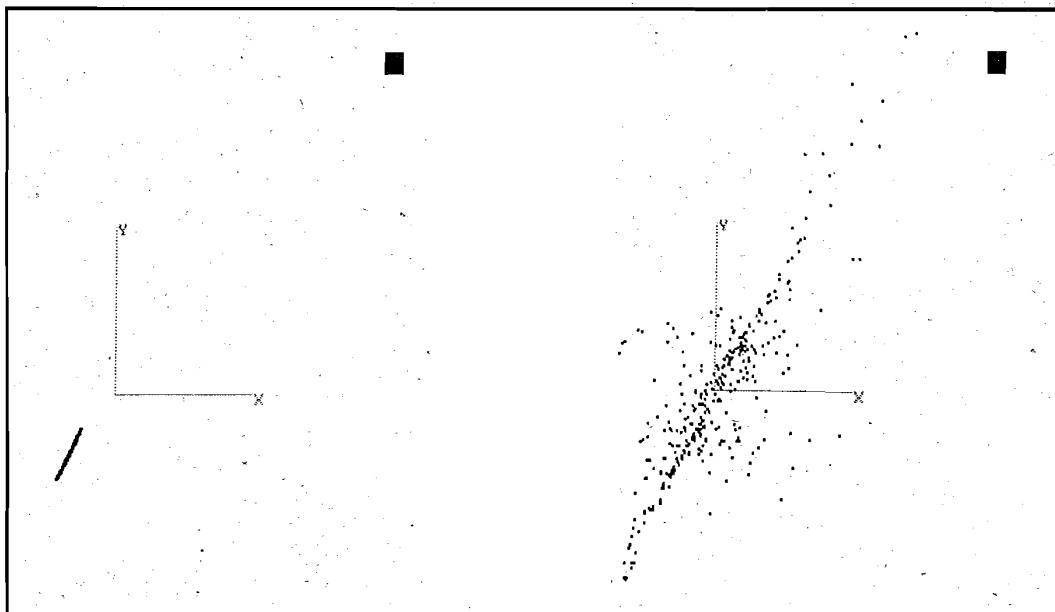


Figura 2.- Dispersión de los condiciones iniciales en el sistema de Lorenz en función del rango de predicción a) $T = 1,0$. b) $T = 10,0$

La componente determinista para integraciones largas surge en el modelo de Lorenz por la existencia de atractores (*Sparrow, 1982*) y en la atmósfera por la existencia de regímenes (*Mo y Ghill, 1987; Molteni y otros, 1989*). **La existencia de atractores o regímenes significa que ambos sistemas tienen una preferencia de residencia en ciertos estados o en las proximidades de ciertos estados.**

El sistema de Lorenz, para valores adecuados de los parámetros, se mueve alrededor del famoso atractor anómalo con forma de "alas de mariposa" (véanse Figs. 3a y 3b). Tiene también tres puntos estacionarios inestables, uno en el origen de coordenadas y los otros dos en el centro de cada ala de mariposa. La topología de tal atractor determina dos escalas temporales asociadas con el modelo. Una describe la oscilación del sistema alrededor del punto inestable situado en el centro de cada ala de mariposa. Y la otra mide el tiempo de permanencia promedio en cada una de las alas de mariposa.

Estas **dos escalas temporales características**, asociadas con una frecuencia propia dentro de un régimen, y con un tiempo de permanencia en dicho régimen, aparecen también en la truncación de 10 componentes de la ecuación barotrópica realizada por *De Swart (1992)*, que incluye como un caso particular los regímenes de flujo bloqueado y flujo zonal de *Charney y Devore (1978)*.

3. Parametrizaciones de los procesos físicos, integraciones a largo plazo.

Los modelos "completos", bien sean solamente atmosféricos o acoplados con otros componentes (p. ej., océanos, hielos, biosferas, etc.), se han utilizado ampliamente en primer lugar para explorar su propia climatología y a continuación para comparar con la climatología de la atmósfera real y eventualmente para proyectar futuros cambios en el sistema climático.

Es muy conocido el hecho de que cualquier modelo después de un período transitorio, en el que recuerda las condiciones iniciales, evoluciona alrededor de su propia climatología, siendo ésta en muchos casos muy diferente de la de la atmósfera real. Dicha climatología significa no solamente los valores medios de las variables meteorológicas, sino también las desviaciones y otros momentos de orden superior. Es de la mayor importancia considerar el **grado de actividad de la atmósfera simulada**, es decir, hablando en términos de sistemas dinámicos, si se mueve frecuentemente entre algunos atractores o si permanece largo tiempo alrededor de la órbita de un atractor.

Las parametrizaciones de los procesos físicos pueden ser consideradas en las predicciones a corto plazo como pequeñas correcciones a las soluciones de las ecuaciones adiabáticas. Sin embargo en las **integraciones largas de tipo cli-**

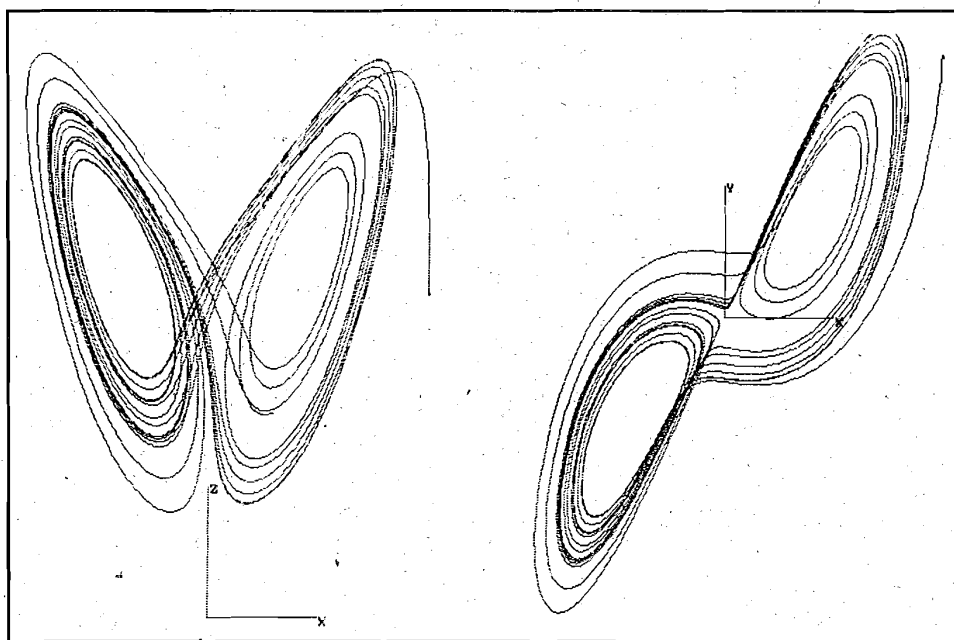


Figura 3.- Atractor anómalo en forma de "alas de mariposa" del sistema de Lorenz. a) Proyección (x, z). b) Proyección (x, y)

mático lo realmente importante son las **modificaciones que dichos términos pueden dar lugar en la estructura topológica de las soluciones.** El sistema de Lorenz, por tratarse de un sistema inestable, es muy sensible a la adición de perturbaciones que pueden modificar drásticamente el comportamiento asintótico de las soluciones y por lo tanto sus atractores. Considérese, por ejemplo, el caso hipotético en el que se incluye en cada una de las ecuaciones de Lorenz un **término adicional de tipo cuadrático que pudiera estar asociado con la parametrización de la difusión.** La difusión se representa en el espacio físico mediante el operador laplaciano, que pasa a ser un término cuadrático en el espacio de fases en el que se define la ecuación de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y - 0,007x^2 \\ y &= -xz + rx - y - 0,007y^2 \\ \dot{z} &= xy - bz - 0,007z^2 \end{aligned} \quad [5]$$

Obsérvese que la simple adición de un término pequeño, que puede considerarse como una perturbación, cambia sustancialmente la estructura topológica de las soluciones (véase Fig. 4). El sistema pasa de tener dos regímenes a tener uno solo, y el atractor anómalo se convierte en un punto. Las integraciones muestran que inicial-

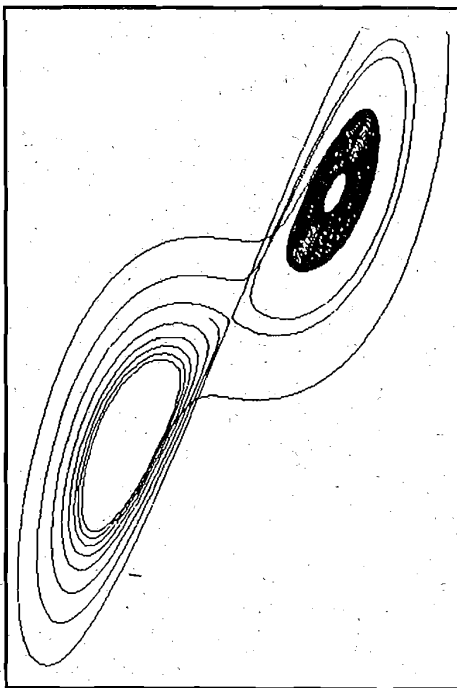


Fig. 4.- Cambio de estructura del atractor al añadir términos cuadráticos en el sistema original

mente el sistema oscila entre dos regímenes para finalmente caer en uno de los puntos estacionarios correspondientes a una de las alas de la mariposa, que ahora ha pasado a ser un punto de equilibrio estable. En las integraciones climáticas estas variaciones, que pueden aparecer como consecuencia de emplear una u otra parametrización de los diferentes procesos físicos, pueden originar que se tengan diferentes regímenes entre los que alterna la atmósfera.

Supongamos ahora que lo que se intenta es ver cómo afecta una **parametrización como la de la radiación** a las ecuaciones de Lorenz. Para ello incluimos una ecuación adicional que nos va a describir la temperatura del suelo, y esta ecuación la vamos a acoplar con una de las ecuaciones de Lorenz. La ecuación adicional para la temperatura del suelo va a incluir un forzamiento externo con variación sinusoidal en el tiempo. Dependiendo del valor de c_2 podemos explorar el papel de las oscilaciones asociadas al ciclo diurno, a los cambios estacionales o cambios a mayor período asociados por ejemplo con los ciclos solares. La constante c , nos permitirá graduar el forzamiento externo, mientras que la constante c_3 es el acoplamiento con el sistema de Lorenz. Obsérvese que el grado de complejidad aumenta notablemente al pasar de un sistema autónomo como el de Lorenz a otro no autónomo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y - c_3(T_s - x) \\ y &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \\ T_s &= c \cdot \text{sen}(2\pi t/c_2) + c_3(T_s - x) \end{aligned} \quad [6]$$

Para valores de $c = 0,1$ corespondientes a la oscilación diurna, valores de la amplitud del forzamiento $c_2 = 100,0$ y un débil acoplamiento $c_3 = 0,01$ observamos nuevamente cambios en la estructura de las soluciones que afectan al tiempo de permanencia en cada uno de los dos regímenes. Integrando el sistema de Lorenz utilizando un esquema temporal predictor-corrector con un paso temporal de $\Delta t = 0,001$ hasta tiempos suficientemente largos, se observa que la simetría original en cuanto a tiempos promedio de permanencia en cada uno de los dos regímenes de 1,6 unidades de tiempo adimensional se rompe en dos tiempos de permanencia distintos de 2,1 y 1,7 respectivamente. Observamos pues que en este caso al acoplar débilmente un sistema forzado externamente se mantiene al contrario que en el caso anterior la estructura en "alas de mariposa", pero el

tiempo de permanencia o la probabilidad de encontrarse en un régimen es mayor que en el otro.

Resultados similares han sido obtenidos por *Molteni y otros (1992)* acoplando el sistema de Lorenz con un sistema lineal que simula el acoplamiento entre la atmósfera extratropical y las anomalías de SST en los trópicos. También en este caso el acoplamiento con un sistema lineal es capaz de romper la simetría entre los dos regímenes equiprobables.

4. Atractores y predecibilidad.

La variación de un volumen inicial del espacio de fases en la que se basa el **método de la dispersión de poblaciones de estados**, está limitada a intervalos de integración relativamente cortos cuando se aplica a un sistema caótico tal como el sistema de Lorenz o la atmósfera.

A la vista de lo considerado en el apartado anterior, surge la cuestión de que a un **sistema dinámico se le puede caracterizar por sus atractores** y viceversa (*véase González y otros, 1980*). En consecuencia, la predecibilidad podría considerarse, como la probabilidad del "salto" de la órbita o región de influencia de un atractor a la de cada uno de los otros atractores del sistema.

Cuando se trata de integraciones largas la población inicial de estados acaba llenando amplias porciones del espacio de fases, por lo que en este caso mirando simplemente la dispersión obtenemos poca información. En este caso es más razonable considerar, los **atractores del sistema, su estructura y la movilidad del sistema entre los diferentes atractores** o partes de un atractor. Esto se corresponde con el estudio climático de los regímenes atmosféricos y la variabilidad entre ellos.

La estructura de los atractores cambia drásticamente al añadir perturbaciones asociadas a las diferentes parametrizaciones. En consecuencia, la predecibilidad asociada al estudio de los regímenes y la movilidad entre ellos puede cambiar radicalmente al variar los esquemas de las parametrizaciones. Igualmente se puede decir cuando se acopla el sistema con otros sistemas (*Molteni y otros, 1992*).

Parece razonable incluir cuando se estudia la predecibilidad mediante la dispersión de poblaciones el efecto de la sensibilidad del sistema, y por lo tanto de la estructura de sus atractores, frente a variaciones en las parametrizaciones, al

menos frente a las más críticas de ellas, como son las de los procesos convectivos y radiativos, en el establecimiento de la climatología del sistema.

Cuando se consideran integraciones a plazos no demasiado largos una alternancia híbrida consiste en **analizar la dispersión de poblaciones pero estudiando cómo se agrupan las diferentes trayectorias alrededor de los atractores del sistema.** Las trayectorias en su movimiento hacia diferentes regímenes se agrupan y un análisis "cluster" puede dar una idea de las posibles alternancias de la predicción y de su probabilidad.

Referencias.

- Charney, J.C.; Devore, J.C. (1979). Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. J. Atmos. Sci., 36, pp. 1.205-1.216.*
- De Swart, H.E. (1992). Predictability properties of a minimum-order atmospheric spectral model with vorticity behaviour. Enviado al Q.J.R. Meteor. Soc.*
- García-Moya, J.A.; Rodríguez Camino, E. (1992). Aplicación del método de Montecarlo a la predicción numérica del tiempo. En este mismo volumen.*
- González Gascón, F.; Moreno Insertis, F.; Rodríguez Camino, E. (1980). The inverse problem of nonlinear dynamical systems: a constructive approach. Hadronic Journal, 3, pp. 1.491-1.520.*
- Lorenz, E.N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. Atmos. Sci., 20, pp. 130-141.*
- Madden, R.A.; Julian, P.R. (1971). Detection of a 40-50 day oscillation in the zonal wind in the tropical Pacific. J. Atmos. Sci., 28, pp. 702-708.*
- Mo, K.C.; Ghil, M. (1987). Statistics and dynamics of persistent anomalies. J. Atmos. Sci., 20, pp. 130-141.*
- Molteni, F.; Ferranti, L.; Palmer, T.N.; Viterbo, P. (1992). A dynamical interpretation of the global response to equatorial Pacific SST anomalies. Enviado al J. Clim.*
- Palmer, T.N. (1992). Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model. Enviado al Bull. Amer. Met. Soc.*
- Rietman, T.S.; Chua, L.O. (1989). Practical numerical algorithms for chaotic systems. Springer-Verlag. N.Y.*
- Rietman, E. (1989). Exploring the geometry of nature: computer modelling of chaos, fractals, cellular automata and neuronal networks. Windcrest.*
- Saltzman, B. (1962). Finite amplitude free convection as an initial value problem. J. Atmos. Sci., 19, 329-341.*
- Sparrow, C. (1982). The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors. Springer-Verlag. N.Y.*