MINISTERIO DE TRANSPORTES, TURISMO
Y COMUNICACIONES

INM INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA

NOTAS DE CLIMATOLOGIA

2

DISTRIBUCION DE VALORES EXTREMOS
(PERIODOS DE RETORNO)

Andrés Blanco García
Jefe de la Sección de Estudios Climatológicos
Servicio de Climatología

JT/mi

MINISTERIO DE TRANSPORTES, TURISMO Y COMUNICACIONES

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA
PROGRAMA DE APLICACIONES Y
REDES ESPECIALES

Nota Técnica 84-I

FRECUENCIAS DE LA DIRECCION DEL VIENTO

1 - Planteamiento

En los trabajos prácticos de climatología del viento y especialmente en sus aplicaciones a estudios locales de difusión atmosférica, se presenta muchas veces el problema de expresar en forma continua la variación de la frecuencia de la dirección del viento entre distintas porciones de un mismo sector o entre las de dos sectores contiguos, partiendo de las estadísticas normales de frecuencias de dirección tomadas sobre un número limitado de sectores de dirección, generalmente 8 ó 16 en el caso mejor.

Este problema se puede resolver con cierta sencillez, empleando funciones parciales para cada sector, que recojan la variación de las frecuencias dentro del sector y su relación con los sectores contiguos y que simultaneamente puedan combinarse entre si para conseguir una función continua de frecuencias acumuladas de dirección del viento, tomando como origen un cierto rumbo.

Con ello se resuelve también en terminos gráficos el problema de construir un diagrama polar de frecuencias, donde, una curva continua alrededor del origen, delimite un área proporcional a 100, de forma que, el área de un sector cualquiera comprendido entre dos radios polares exprese en % la frecuencia con que solpla el viento con direcciones comprendidas entre ambos radios.

Una función apta para tales fines, es la función de tercer grado, que convencionalmente designamos por "función de sector" $y_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, en la que x es el angulo que forma el radio vector de cada rumbo de dicho sector, con el orígen del mismo. Esta función es válida unicamente para angulos menores o iguales que el angulo α del sector.

Sus cuatro coeficientes a_i b_i c_i y d_i serán especificos para cada sector i, y distintos de unos sectores a otros, determinandose de forma que

.../..

la función acumulada de frecuencias resultante, sea una curva continua y creciente, fácil de aproximar mediante ordenador o con una sencilla calculadora; para ello deben elegirse estos cuatro coeficientes de forma que cumplan los requisitos que se exponen después utilizando un ejemplo práctico aplicado a una estadística de frecuencias de vientos tomada sobre 16 sectores de dirección de angulo $\alpha = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ radianes.

2 - Función de sector

Como ya se indica antes, esta tiene la forma $y_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, y expresa los valores que la función acumulada de frecuencias Y toma dentro del sector i. Estos valores se acumulan desde el origen del sector i = 1. Para sector origen (sector 1) debe tomarse el de menos frecuencia. Los requisitos a cumplir por la función, o mejor, por sus coeficientes son:

$$d_i = \sum_{i=1}^{i-1} f_i = Y_{i-1} \qquad (y_i - d_i) \text{ para } x = \alpha \qquad \text{o sea}$$

$$f_i = (y_i - d_i)_{x=\alpha} = a_i \alpha^3 + b_i \alpha^2 + c_i \alpha \quad [2] \qquad \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} \geqslant 0 \right] [3]$$

desde x=0 a x=α

$$\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x} \right)_{\text{para } x = 0} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)_{\text{para } x = \alpha} \qquad [4]$$

Las condiciones expresadas por [1] y [2] son las evidentes y primarias para obtener el deseado dispositivo de acumulación. La [3] implica la condición de que la función sea "no decreciente" en todos los puntos del sector i y la [4] unida a las anteriores lleva implícita la absoluta continuidad de la curva $Y = F((n-1)\alpha + x)$ en los puntos de discontinuidad de la obcisa de la función parcial (donde esta cambia de coeficientes y pasa de x = α a x = 0

De la [2] se obtiene $\frac{f_i}{\alpha} = a_i \alpha^2 + b_i \alpha + c_i$ [5]

De las [4] se obtiene $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_{x=0} = c_{i+1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = 3a_i \alpha^2 + 2b_i \alpha + c_i$

$$\frac{c_{i+1} - c_i}{2\alpha} = \frac{3}{2} a_i \alpha + b_i \quad [6]$$

Si se desea que en un diagrama polar de frecuencias f_i represente el área del sector con esa frecuencia en dicho diagrama, deberá verificarse que

$$f_i = \int_0^\alpha d f_i = \int_0^\alpha \frac{r^2}{2} dx = \frac{\overline{r_{xi}^2}}{2} \alpha$$

siendo $\overline{r_{xi}^2}$ la media cuadrática de los radios polares del sector i.

Entonces $\frac{f_i}{\alpha} = \frac{\overline{r^2_{xi}}}{2}$ $\qquad \frac{f_{i-1}}{\alpha} = \frac{\overline{r^2_{x\,i-1}}}{2}$ $\qquad \frac{\frac{f_i + f_{i-1}}{2}}{\alpha} = \frac{\overline{r^2_{xi}} + \overline{r^2_{x\,i-1}}}{4}$

$\frac{f_i + f_{i-1}}{2\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{r^2_{xi}} + \overline{r^2_{x\,i-1}}}{2}$ y se puede tomar como valor bastante apró-ximado de $c_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) = \frac{r^2}{2}$ (el valor intermedio de la f_i en los sectores f_i y f_{i-1}) por ser el punto x = 0 del sector f_i el intermedio entre el origen y el final de ambos, o dicho de otra forma, se acepta la aproximación $\overline{r^2} = \frac{\overline{r^2_{xi}} + \overline{r^2_{x\,i-1}}}{2}$ (radio polar del punto origen del sector i, al cuadrado, igual a la media de los radios polares cuadráticos medios de los sectores anterior y posterior), y por consiguiente:

para x=0

$$C_i = \frac{f_i + f_{i-1}}{2\alpha} \qquad [7]$$

De la expresión [5] se obtiene sustituyendo este valor de C_i

$$\frac{f_i}{\alpha} = a_i\,\alpha^2 + b_i\,\alpha + \frac{f_i + f_{i-1}}{2\alpha} \quad ; \quad \frac{f_i - f_{i-1}}{2\alpha^2} = a_i\,\alpha + b_i \qquad [8]$$

La expresión [6] es; $\frac{C_{i+1} - C_i}{2\alpha} = \frac{3}{2}\,a_i\,\alpha + b_i$

Restando la [6] de la [8] resulta $a_i = \frac{C_{i+1} - C_i}{\alpha^2} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\alpha^3}$ [9]

y teniendo en cuenta que $C_{i+1} = \frac{f_{i+1} + f_i}{2\alpha}$ resulta para a_i la sencilla expre-sión:

$$a_i = \frac{\frac{f_{i+1} + f_{i-1}}{2} - f_i}{\alpha^3} \qquad [10]$$

De la [8] se obtiene para b_i $\quad b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{2\alpha^2} - a_i\,\alpha$

y sustituyendo en ella el valor [10] de a_i:

$$[11] \qquad b_i = \frac{3 f_i - 2 f_{i-1} - f_{i+1}}{2\alpha^2}$$

Los coeficientes de la ecuación

$y_i = a_i\ x^3 + b_i\ x^2 + c_i\ x + d_i$ que cumple los requisitos [1], [2] y [4] anteriores son:

$$a_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2 f_i}{2\alpha^3} \qquad b_i = \frac{3 f_i - 2 f_{i-1} - f_{i+1}}{2\alpha^2} \qquad c_i = \frac{f_i + f_{i-1}}{2\alpha}$$

$$d_i = \sum_{i=1}^{i-1} f_i$$

Si en vez de expresar x en radianes se expresa en fracciones de α

$x' = \frac{x}{\alpha}$ o sea, con un valor variando entre 0 y 1 dentro del sector, los coeficientes a_i b_i y c_i pueden sustituirse por los

$$a'_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2} \quad [12] \qquad b'_i = \frac{3f_i - 2f_{i-1} - f_{i+1}}{2} \quad [13] \qquad c'_i = \frac{f_i + f_{i-1}}{2} \quad [14]$$

y la función del sector sería $y_i = a'_i x'^3 + b'_i x'^2 + c'_i x'^1 + d'_i$

3 - Limitaciones al empleo de la función de sector

Quedan por exponer las limitaciones que suponen las condiciones [3] cuya definición se ha dejado a proposito para el final, por resultar mas fácil definirlas en función de los parámetros a'_i b'_i y c'_i.

Las condiciones [3] se expresan brevemente en la forma [15] $\longrightarrow$

[15] $3a'_i x'^2 + 2b'_i x' + c'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x'} > 0$, expresión en la que c'_i es siempre positivo.
Se atiende a los siguientes casos:

3 - 1º. $a' > 0$ $b' < 0$ Deberá ser $3ax'^2 - 2bx' + c' >$, o sea, [16] $c > x\,(2b - 3ax)$ para todo x, $1 \geq x \geq 0$.

Para x entre 1 y $\frac{2b}{3a}$, se verifica siempre;

Para x entre 0 y $\frac{2b}{3a}$ el mayor valor del 2ª miembro de la desigualdad [16] es para $\frac{b}{3a} = x$ y resulta $c > \frac{b2}{3a}$ $3ac > b^2$, que es la condición necesaria y suficiente.

3 - 2ª. $a'_i < 0$ $b'_i > 0$ Deberá ser $-3ax^2 + 2bx + c > 0$, o sea $c > x\,(3ax - 2b)$ [17]

Para x entre 0 y $\frac{2b}{3a}$, se verifica siempre;

Para x entre $\frac{2b}{3a}$ y 1 la función es creciente; tomando su mayor valor para x = 1. La condición necesaria y suficiente es $\frac{c+2b}{4} > |a|$

3 - 3ª. $(a_i = 0 \quad b_i < 0)$ $(a_i < 0, b_i < 0)$, $(a_i < 0 \quad b_i = 0)$ En estos tres casos es inmediato ver que las condiciones son respectivamente $\frac{c}{2} > |b|$ $c > 3|a| + 2|b|$, y $\frac{c}{3} > |a|$

3 - 4ª.

$a_i > 0 \quad b_i > 0$

$a_i = 0 \quad b_i > 0$

$a_i > 0 \quad b_i = 0$

En estos tres casos es evidente que siempre se verifica la condición [15]

4 - Ejemplo práctico

Se adopta. para ejemplo, una distribución de frecuencias sobre 16 sectores de dirección clásicos, no demasiado extraña para la España peninsular; esta es:

Direcciones y Frecuencias en %

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	← Direcciones
5	8	10	7	6	3	3	4	← Frecuencias
S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	← Direcciones
6	7	12	9	7	6	3	4	← Frecuencias

Para definir los coeficientes de las funciones de sector se usan las formulas [12] [13] y [14] así como la expresión de d_i de la formula [1]

Se toma como primer sector para definir las frecuencias acumuladas, - el del NW, así que estas se contabilizarán desde el origen de dicho sector en el sentido NW → NNW → N → NNE → NE etc.

La primera operación consiste en calcular los coeficientes de las 16 funciones de sector, $y_i = a'_i x'^3 + b'_i x'^2 + c'_i x'^1 + d'_i$ y seguidamente comprobar su compatibilidad, lo que resulta fácil agrupando los datos calculados por las formulas citadas en la adjunta tabla I.

Seguidamente se procede a obtener las frecuencias acumuladas, lo que no representa mas esfuerzo que el de una sola programación del cálculo de los valores de la función para una secuencia simple de valores de x' desde cero a uno, por ejemplo 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, etc. si se desea acumular por sectores de 2º y 15' o, 0.2, 0.4, 0.6 etc. si por sectores de 4º y 30'. En la citada programación se - introduce una subrutina para que, después de obtenido el valor correspondiente a X'= 1, sean sustituidos los coeficientes a'_i, b'_i, c'_i y d'_i por las a'_{i+1}, b'_{i+1}, c'_{i+1} y d'_{i+1}, que figuran en la tabla I. En el ejemplo que sigue, se han obtenido las frecuencias acumuladas para intervalos de 4 grados y medio.

Siguen a las tablas I y II, cuatro gráficos con la representación cartesiana de la función de frecuencias acumuladas, que se elabora en cuatro tramos - ensamblables, de 90 grados de abcisa, para establecer con mas detalle la variación de las frecuencias con el azimut tan útil para los estudios de difusión atmosférica

28-VI-84

TABLA 1 Coeficientes

	f_i	d'_i	a'_i	b'_i	c'_i	Compatibilidad Nº de la regla
WNW	,06					
NW	,03	,00	,02	-,035	,045	3,-1
NNW	,04	,03	,00	,005	,035	3,-4
N	,05	,07	,01	-,005	,045	3,-1
NNE	,08	,12	-,005	,02	,065	3,-2
NE	,10	,20	-,025	,035	,090	3,-2
ENE	,07	,30	,01	-,025	,085	3,-1
E	,06	,37	-,01	,005	,065	3,-2
ESE	,03	,43	,015	-,03	,045	3,-1
SE	,03	,46	,005	-,005	,030	3.-1
SSE	,04	,49	,005	,000	,035	3,-4
S	,06	,53	-,005	,015	,050	3,-2
SSW	,07	,59	,02	-,015	,065	3,-1
SW	,12	,66	-,04	,065	,095	3,-2
WSW	,09	,78	,005	-,020	,105	3,-1
W	,07	,87	,005	-,015	,080	3,-1
WNW	,06	,94	-,01	,005	,065	3,-2
NW	,03	1,00				

T A B L A   II

Tabla de frecuencias acumuladas cada 4,5 grados sexagesimales expresadas en %

	4,5º	9,0º	13,5º	18,0º	22,5º	27,0º	33,5º	38º	42,5º	45,0º
Sectores NW y NWW De 0 a 45'00º	,78	1,37	1,87	2,38	3,00	3,72	4,48	5,28	6,12	7,00
Sectores N y NNE	7,89	8,78	9,74	10,79	12,00	13,38	14,89	16,51	18,22	20,00
Sectores NE y ENE	21,92	24,00	26,12	28,16	30,00	31,61	33,06	34,42	35,71	37,00
Sectores E y ESE	38,31	39,62	40,86	42,01	43,00	43,79	44,42	44,94	45,45	46,00
Sectores SE y SSE	46,58	47,15	47,73	48,34	49,00	49,70	50,43	51,21	52,06	53,00
Sectores S y SSW	54,06	55,20	56,43	57,70	59,00	60,26	61,49	62,79	64,26	66,00
Sectores SW y WSW	68,13	70,58	73,18	75,71	78,00	80,02	81,91	83,69	85,38	87,00
Sectores W y WNW	88,54	89,99	91,37	92,70	94,00	95,31	96,62	97,86	99,01	100,00

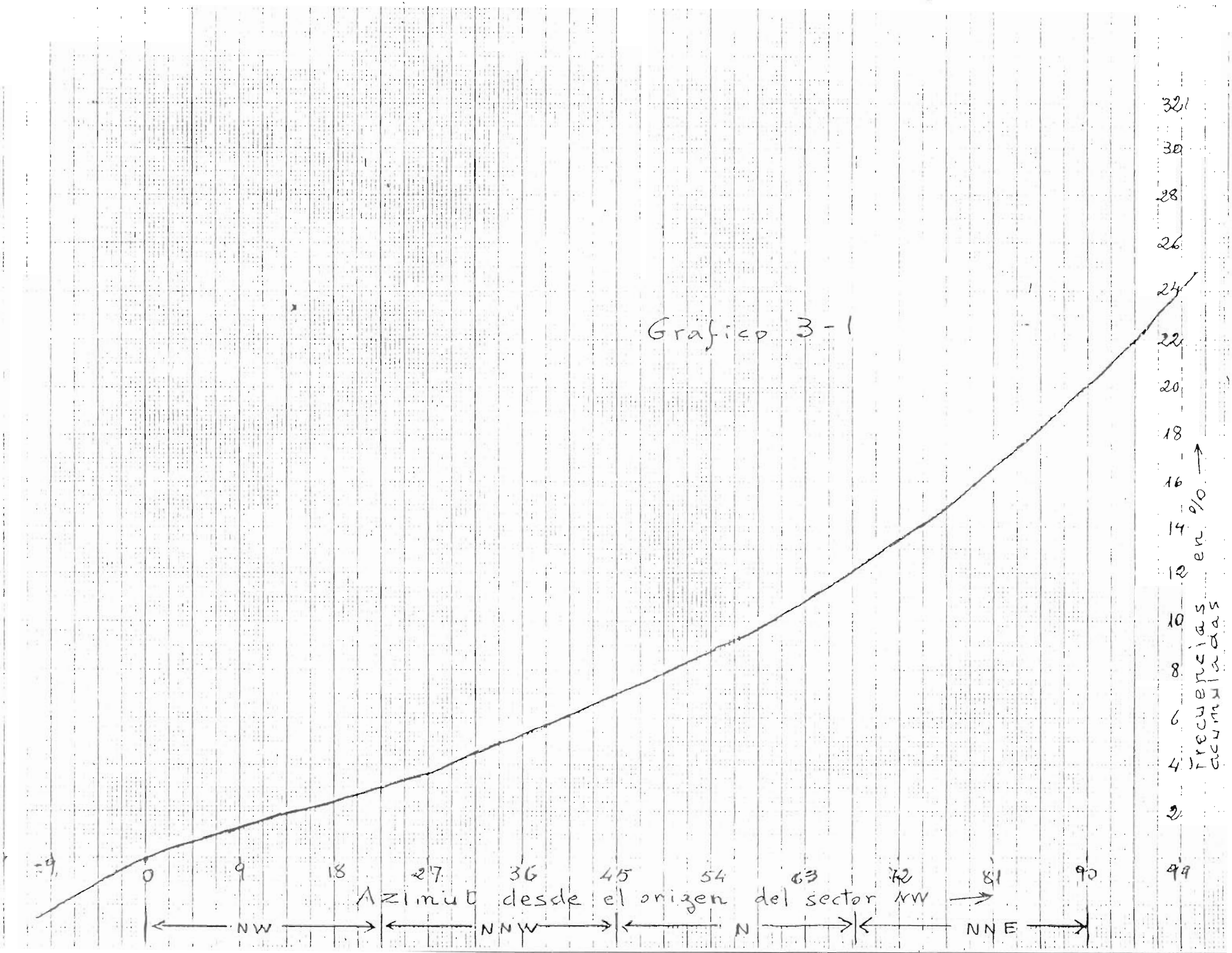
Grafico 3-1
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
frecuencias acumuladas en %
-9
0
9
18
27
36
45
54
63
72
81
90
99
Azimut desde el origen del sector NW
NW
NNW
N
NNE

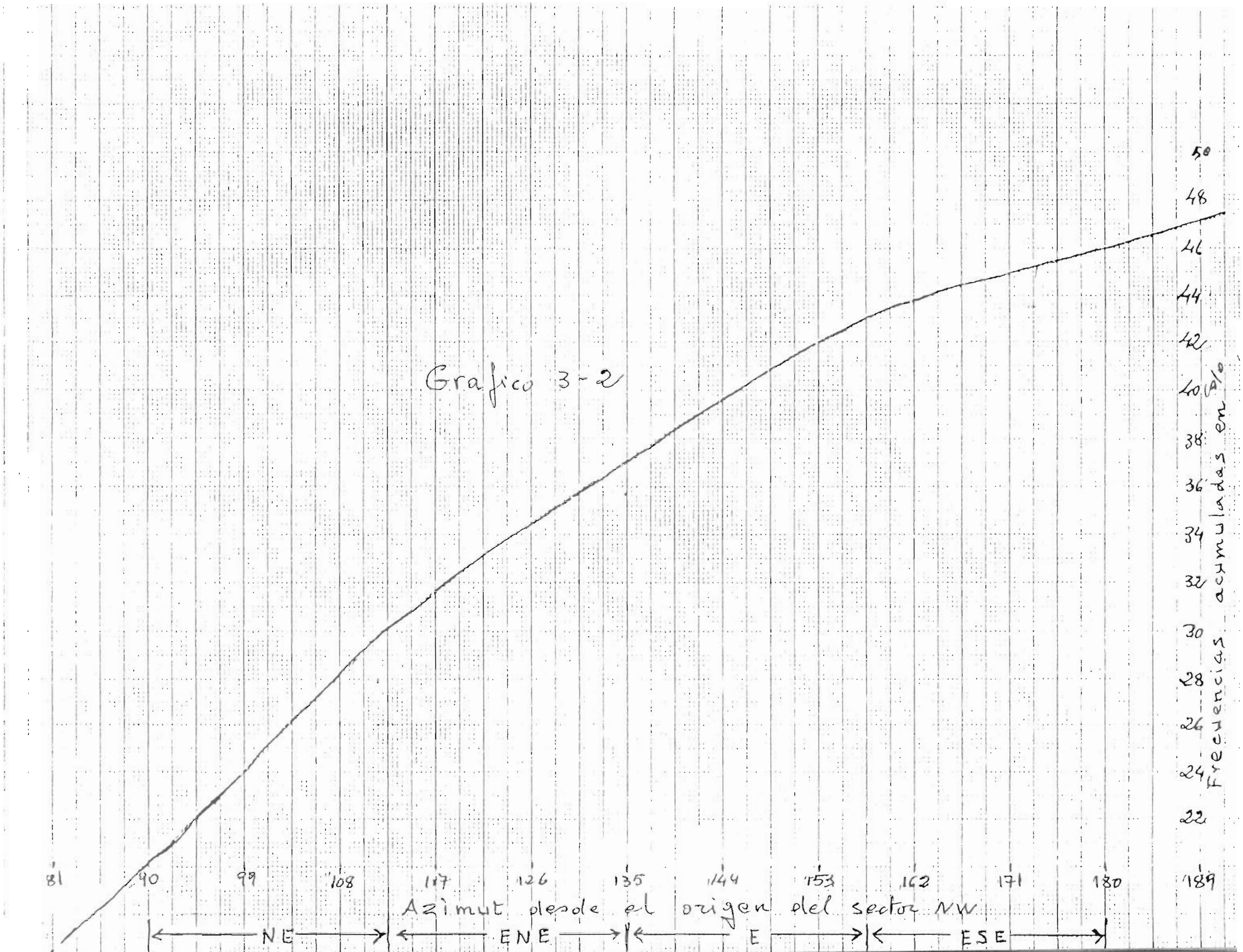

Grafico 3-2
50
48
46
44
42
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
Frecuencias acumuladas en %
81
90
99
108
117
126
135
144
153
162
171
180
189
Azimut desde el origen del sector NW
NE
ENE
E
ESE

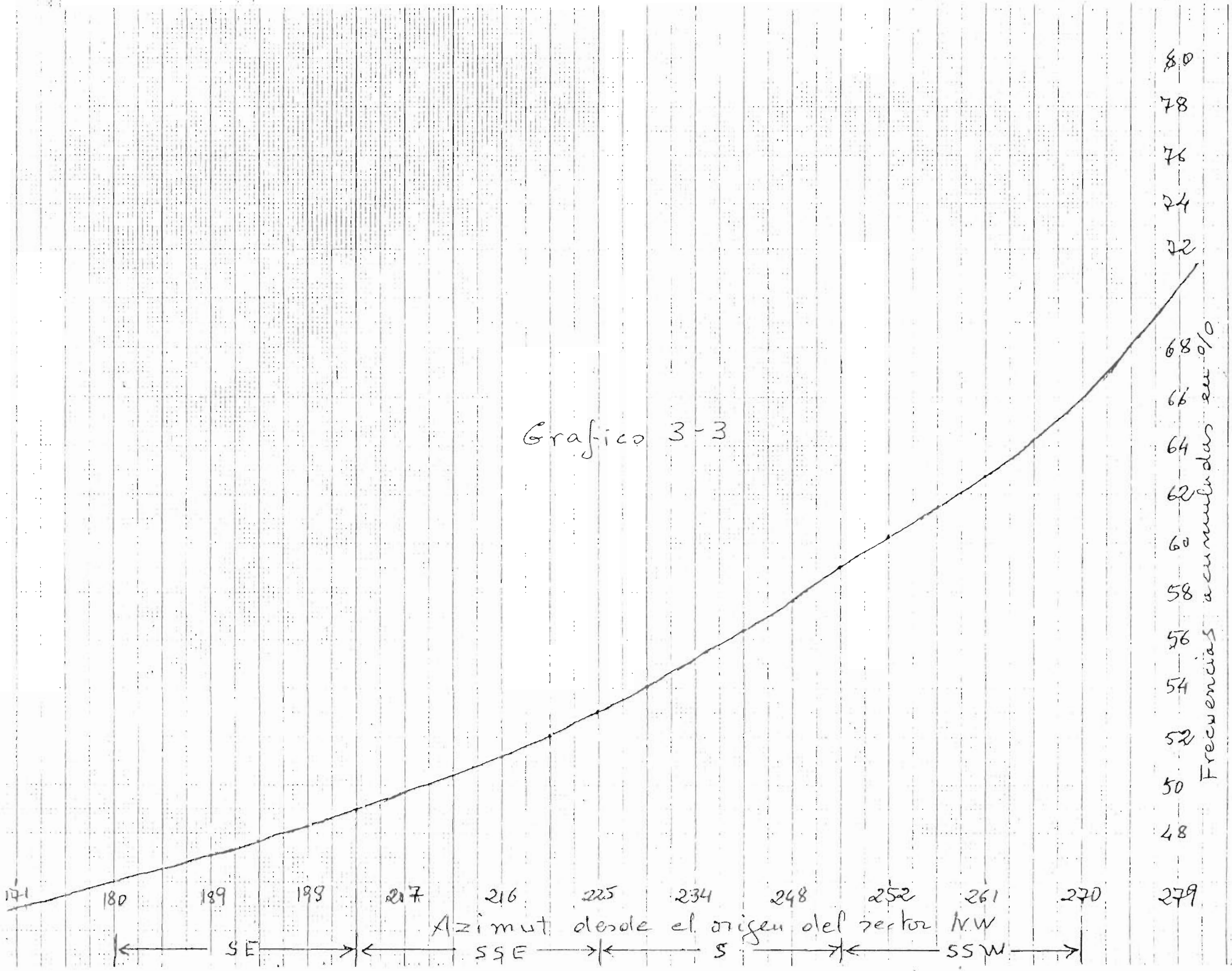
Grafico 3-3
80
78
76
74
72
68
66
64
62
60
58
56
54
52
50
48
Frecuencias acumuladas en %
171
180
189
198
207
216
225
234
248
252
261
270
279
Azimut desde el origen del sector NW
SE
SSE
S
SSW

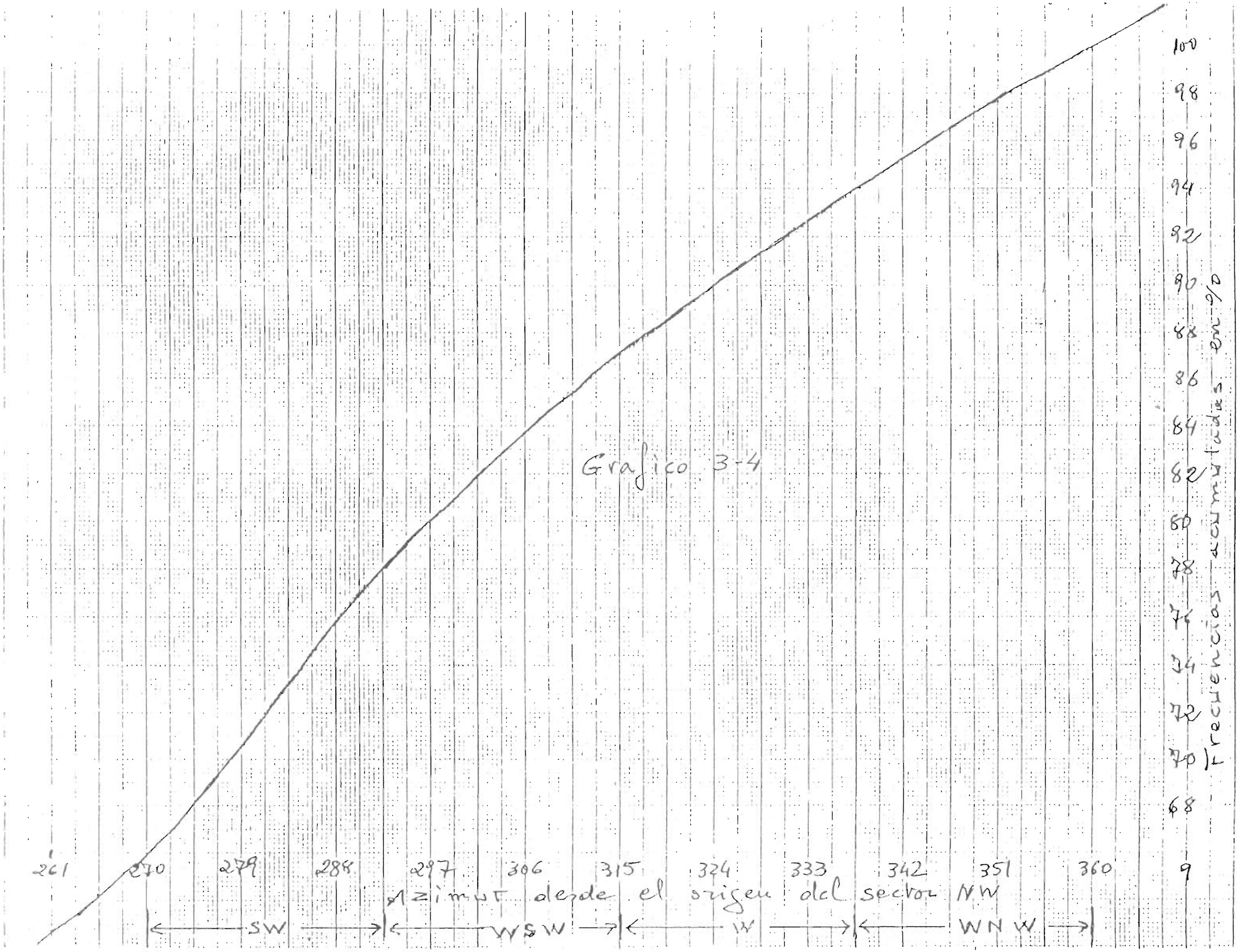

Grafico 3-4
Frecuencias acumuladas en %
100
98
96
94
92
90
88
86
84
82
80
78
76
74
72
70
68
9
261
270
279
288
297
306
315
324
333
342
351
360
Azimut desde el origen del sector NW
SW
WSW
W
WNW