III

LOS DIAGRAMAS MIXTOS EN METEOROLOGIA

Conferencia pronunciada el día 12 de mayo de 1962

por

D. JOSE M.ª JANSA GUARDIOLA

Meteorólogo

LOS DIAGRAMAS MIXTOS EN METEOROLOGIA

Todos nosotros estamos acostumbrados a manejar diagramas: el mapa sinóptico, las topografías, los cortes verticales, las bandas de los aparatos registradores son diagramas; nada digamos de los diagramas termodinámicos, las curvas de evolución... En una palabra, podríamos afirmar que nuestro principal instrumento de trabajo es el *diagrama*. Por esto llama la atención que casi en ningún texto sea abordado el problema de la fundamentación teórica de este instrumento de trabajo, y por esto me ha parecido oportuno traerlo aquí, aunque sólo sea en forma muy incompleta.

Ante todo, se observa que todos los diagramas citados se pueden clasificar en tres grupos: diagramas puramente geométricos, en los cuales todas las coordenadas son magnitudes de naturaleza geométrica y, en particular, longitudes; tales son los mapas sinópticos y los cortes verticales; 2.°, diagramas físicos, en los que ninguna de las coordenadas es de naturaleza geométrica, sino que todas representan magnitudes físicas, como ocurre, por ejemplo, con las bandas de los aparatos registradores y con los diagramas termodinámicos; y, por último, 3.°, diagramas que tienen unas coordenadas que son longitudes puras y otras representan magnitudes físicas; éstos son los denominados por nosotros *diagramas mixtos*. De una manera más particular todavía, llamaremos *diagrama mixto* en sentido estricto, aquél que tiene todas sus coordenadas geométricas, excepto una, que es de tiempo. El diagrama mixto completo tendrá cuatro dimensiones, por tener tres el espacio real.

Los problemas matemáticos que plantean los espacios de cuatro dimensiones son demasiado complicados; por esto me ha parecido prudente empezar y limitarme de momento a una de sus secciones tridimensionales, tomando en cuenta dos dimensiones geométricas y una de tiempo. Veamos lo que se puede hacer y empecemos por estudiar los

Vectores mixtos.—Consideremos un espacio representado, como decía, por dos coordenadas de espacio y la de tiempo. Las coordenadas de espacio son las clásicas, que designaremos por x y; la de tiempo la vamos a designar por $u = kt$. El coeficiente k tiene mucha importancia porque está destinado a transformar el tiempo en longitud, pues de lo contrario, no podría introducirse en una representación geométrica. Tiene dimensiones físicas: las de la velocidad. Es arbitrario y característico de cada diagrama en particular. No hay que confundirlo con un simple factor de escala. Factor de escala lo tienen necesariamente todos los diagramas, pero el factor de escala de tipo geométrico carece de dimensiones físicas; es un número abstracto. En cambio, k tiene dimensiones físicas y juega un papel distinto. En el campo geométrico, el factor de escala puede incluso reducirse a la unidad (escala natural); respecto de k no ocurre nada parecido; no hay valor privilegiado para k, no tiene sentido hablar de escala natural sobre el eje de los tiempos. Tampoco hay que confundir la arbitrariedad de k, que nos permite darle el valor que queramos, con la posibilidad que tenemos, en un diagrama puramente geométrico, de elegir factores de escala diferentes; es sabido, por ejemplo, que en la representación de un corte vertical no suele emplearse la misma escala para abscisas y para ordenadas, pero esto se hace a sabiendas de que se altera la realidad, de que se introduce una deformación; en cambio, si el diagrama es mixto no se puede hablar de deformación, pues ninguna forma existe antes de la elección de k.

Cuando un punto se mueve, está claro que su posición en cada momento queda determinada por sus dos coordenadas de espacio y la de tiempo y en el diagrama mixto le corresponde un solo punto de coordenadas x, y, u. El movimiento del punto queda representado en forma estática por una curva, que podemos denominar *trayectoria mixta*. Su proyección sobre el plano xy es la trayectoria ordinaria.

Los puntos de la trayectoria mixta pueden individualizarse mediante su *vector de posición*; la proyección de este vector sobre el plano espacial es el vector de posición ordinario, su proyección sobre el eje u es, como veremos después, una función universal (lineal) del tiempo, que es la misma para todos los móviles.

Ahora bien, hemos usado la palabra *vector*, y para tener derecho a ello es necesario definirla de nuevo, porque la definición euclidiana clásica no es estrictamente aplicable. Llamaremos *vector mixto*, o mejor *vector en el diagrama mixto*, a un ente compuesto de tantos elementos como coordenadas tenga el diagrama (en este caso de tres), y que se comportan como las diferencias de coordenadas de dos puntos en toda transformación *permitida* de coordenadas. Aquí cargamos el acento sobre la palabra *permitida*. En el diagrama mixto no están permitidas todas las transformaciones posibles, sino únicamente aquellas que dejan invariantes las distancias espaciales y los intervalos de tiempo, es decir, los cambios de origen, que corresponden a cambios de origen geométrico y de momento inicial, las rotaciones alrededor del eje temporal y los cambios de escala sobre este eje (fig. 1).

No escribimos las fórmulas que corresponden a la parte puramente geométrica de la transformación, que son las clásicas (1); la parte que

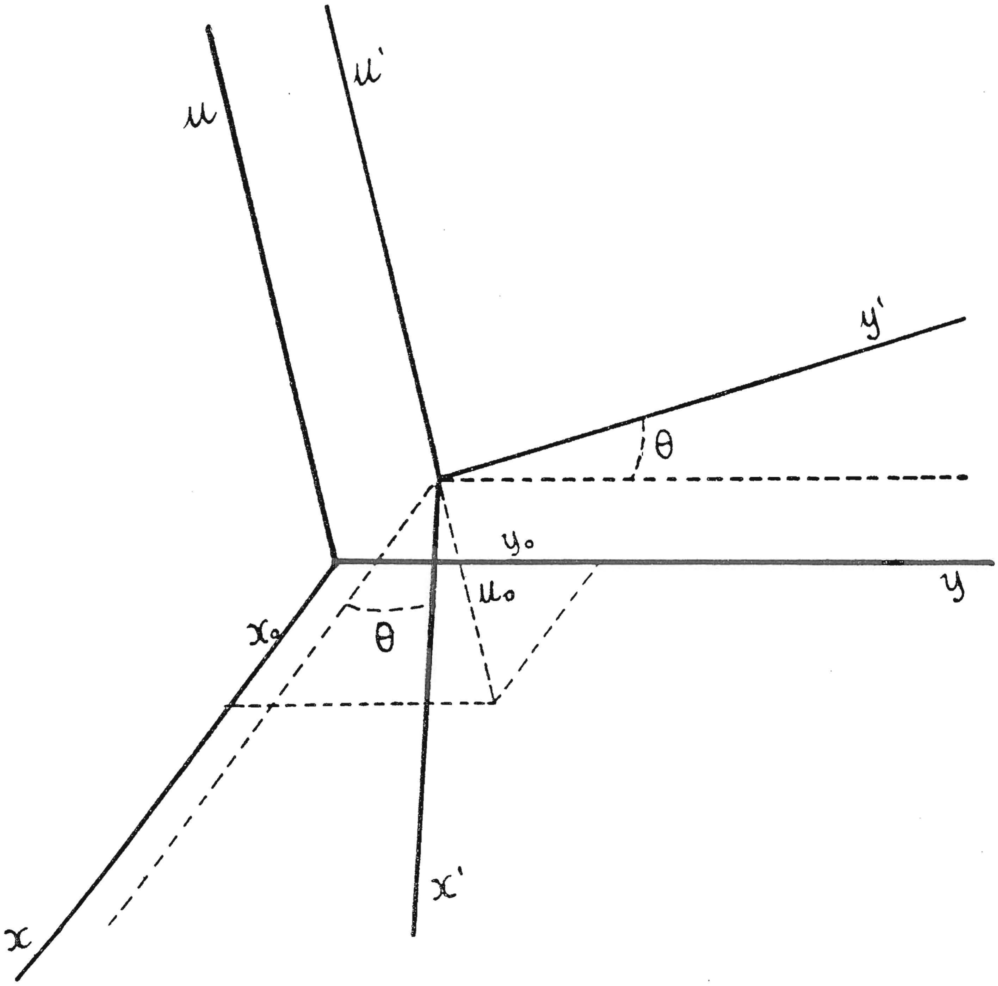

Figura 1.ª

afecta al eje temporal es sencillamente $u = \gamma\, u'$. Evidentemente, el coeficiente γ equivale a la razón entre los coeficientes de escala, es decir:

$$\gamma = \frac{k}{k'}$$

Es interesante señalar que mientras las transformaciones puramente geométricas dejan invariante la *forma* de las figuras, las de tipo temporal las *deforman:* una circunferencia situada en el plano $x\,y$ sigue

NOTA.—Las llamadas entre paréntesis se refieren a las notas que figuran al final del texto.

siendo circunferencia en el x' y'; en cambio, si está sobre el plano x u, se convierte en elipse al pasar al x' u'. Tal vez no sea muy ortodoxo llamar *cambio de coordenadas* a una transformación que hace cambiar la forma de las figuras, pero ya hemos indicado que antes de atribuir a k un valor determinado, las *figuras* no tienen *forma*, y veremos después que con el diagrama mixto se trata de la representación de ciertos entes abstractos capaces de *encarnarse* bajo distintas formas. Y en este sentido no me parece abusivo admitir la denominación de *cambio de coordenadas*. Volveremos más tarde sobre esto con más detalle.

La distancia entre dos puntos de un diagrama mixto no se conserva, puesto que la coordenada vertical es arbitraria; tampoco se conserva la dirección (2). En cambio, podemos formar un invariante, que puede desempeñar un papel análogo sumando el cuadrado del módulo de la proyección espacial con $\dfrac{u^2}{k^2} = t^2$, ya que ambos sumandos, por separado, son evidentemente invariantes (3). Por analogía, y de acuerdo con la definición de vector mixto, la expresión:

$$(A^x)^2 + (A^y)^2 + \frac{(A^u)^2}{k^2}$$

aplicada a un vector genérico, será también invariante, frente a todo cambio de coordenadas permitido. Usamos índices superiores por razones que se comprenderán más adelante.

Es evidente que la suma vectores sigue siendo un vector en el sentido expuesto y, por tanto, su diferencia también.

Si un vector es función de x y u, esto quiere decir que todos sus componentes lo son, y entonces se pueden considerar vectores infinitamente próximos, supuesta la continuidad de dichas funciones.

Métrica del diagrama mixto.—El diagrama mixto carece de métrica intrínseca, pues ésta cambia para cualquier cambio de coordenadas que no implique $\gamma = 1$. Dicho con otras palabras, la métrica la introducimos nosotros mediante el artificio de multiplicar el tiempo t por el coeficiente dimensional k. El espacio abstracto x y t es un espacio de conexión afín y los diagramas mixtos x y u son imágenes métrica de dicho espacio abstracto, que cambian al cambiar el valor de k. Las propiedades del diagrama que sean independientes de k son propiedades afines y pertenecen al espacio afín; la más importante es el paralelismo: como es sabido, en un espacio afín se puede definir la equipolencia de vectores, según Levy-Civitta, aunque no se pueden definir sus módulos. Es muy fácil demostrar elementalmente que el paralelismo, en sentido euclidiano, entre dos vectores del diagrama mixto, se conserva para cualquier cambio permitido de coordenadas, incluso con $\gamma \neq 1$. Los distintos diagramas mixtos, que difieren entre sí por los respectivos valores de k, se transforman mutuamente por una transformación afín de razón γ; dos figuras que se transforman una en otra mediante dicha afinidad se considerarán iguales; en este sentido no puede decirse que la operación de cambiar de sistema de referencia imponga una deformación propiamente dicha a las figuras, y se disipa la objeción formulada antes contra la asimilación de los cambios de escala sobre el eje u a un auténtico cambio de coordenadas.

Contravariancia y covariancia.—En un espacio euclidiano y empleando solamente coordenadas cartesianas ortogonales, no hay lugar a distinguir entre componentes contravariantes y covariantes de un vector. Cuando se usan coordenadas oblícuas aparece la distinción, pero el ente definido es el mismo. Por el contrario, en un espacio afín, como el representado por un diagrama mixto, la distinción conduce a una verdadera generalización del concepto de vector. Hemos indicado que este nombre se aplica a aquellos entes cuyos componentes se transforman de acuerdo con las fórmulas de transformación de las diferencias de coordenadas, pero falta precisar si se trata de las contravariantes o de las covariantes. En el campo euclidiano la distinción carece de importancia porque el ente definido en ambos casos es el mismo, pero en el espacio afín no lo es; podemos decir que el concepto de vector euclidiano admite dos generalizaciones distintas, que se denominan, respectivamente, *vectores contravariantes* y *vectores covariantes*.

Para puntualizar mejor la distinción, basta considerar (no voy a escribir las fórmulas), que una transformación de coordenadas se caracteriza por la matriz de sus nueve coeficientes y su inversa. Según que el vector sea contravariante o covariante, dichas matrices permutan sus papeles.

No vamos a explicar tampoco con detalle todo lo que se refiere a los componentes espaciales, porque en éstos no se distingue la contravariancia de la covariancia. Sólo vamos a fijarnos en la coordenada temporal: si el vector es contravariante, las fórmulas de transformación serán (4):

$$A^{u} = \gamma A^{u'}$$

$$A^{u'} = \frac{1}{\gamma} A^{u}$$

y si es covariante:

$$B_{u} = \frac{1}{\gamma} B_{u'}$$

$$B_{u'} = \gamma B_{u}$$

Pongamos un ejemplo de cada clase. Un par de puntos ordenados determinan un vector contravariante (el segmento que los une). Esto se demuestra inmediatamente suponiendo que uno de los puntos coincide con el origen de coordenadas, pues entonces sus componentes se identifican con las coordenadas del segundo. Por tanto, la contravariancia de este vector es indiscutible.

Análogamente, la imagen geométrica de un vector covariante la tenemos considerando la figura formada por un par de planos paralelos (5). Si uno de ellos pasa por el origen se demuestra que los recíprocos de los segmentos que el segundo determina sobre los ejes son efectivamente componentes de un vector covariante. El módulo de este vector es el recíproco de la distancia del origen al plano, o en general, el recíproco de la distancia entre los dos planos; en este caso los componentes del vector son, naturalmente, los recíprocos de las diferencias entre los segmentos determinados sobre los ejes. El módulo tampoco se conserva, pero se puede formar un invariante análogo al que corresponde a los vectores contravariantes, y que ahora es:

$$(\mathrm{B}_x)^2 + (\mathrm{B}_y)^2 + k^2\,(\mathrm{B}_u)^2$$

Es curioso observar que si dos vectores, de variancia opuesta, son perpendiculares en un diagrama determinado, lo siguen siendo después de cualquier transformación permitida, como se comprueba aplicando la transformación a la condición de perpendicularidad. En particular, un vector situado en un plano y el vector del plano son siempre perpendiculares (6). La figura lo demuestra intuitivamente (fig. 2).

Todo esto se puede obtener también haciendo uso del Algebra vectorial. No voy a hacerlo para no repetirme, pero en cambio es necesario fijar nuestra atención sobre uno de los resultados más importantes que pueden conseguirse por dicho método: la definición de los tensores métricos. El tensor métrico covariante se relaciona con el invariante de los vectores contravariantes; su último componente vale: $g_{33} = \dfrac{1}{k^2}$; los demás son iguales a la unidad si tienen sus dos subíndices iguales y a cero si son desiguales. Análogamente, el tensor métrico contravariante, enlazado con el invariante de los vectores covariantes, tiene por componente $g^{33} = k^2$ (7).

Con esto se puede pasar de los componentes contravariantes de un vector a los covariantes (8); el único componente que cambia es, naturalmente, el temporal, en la forma:

$$\mathrm{A}_u = \frac{1}{k^2}\,\mathrm{A}^u$$

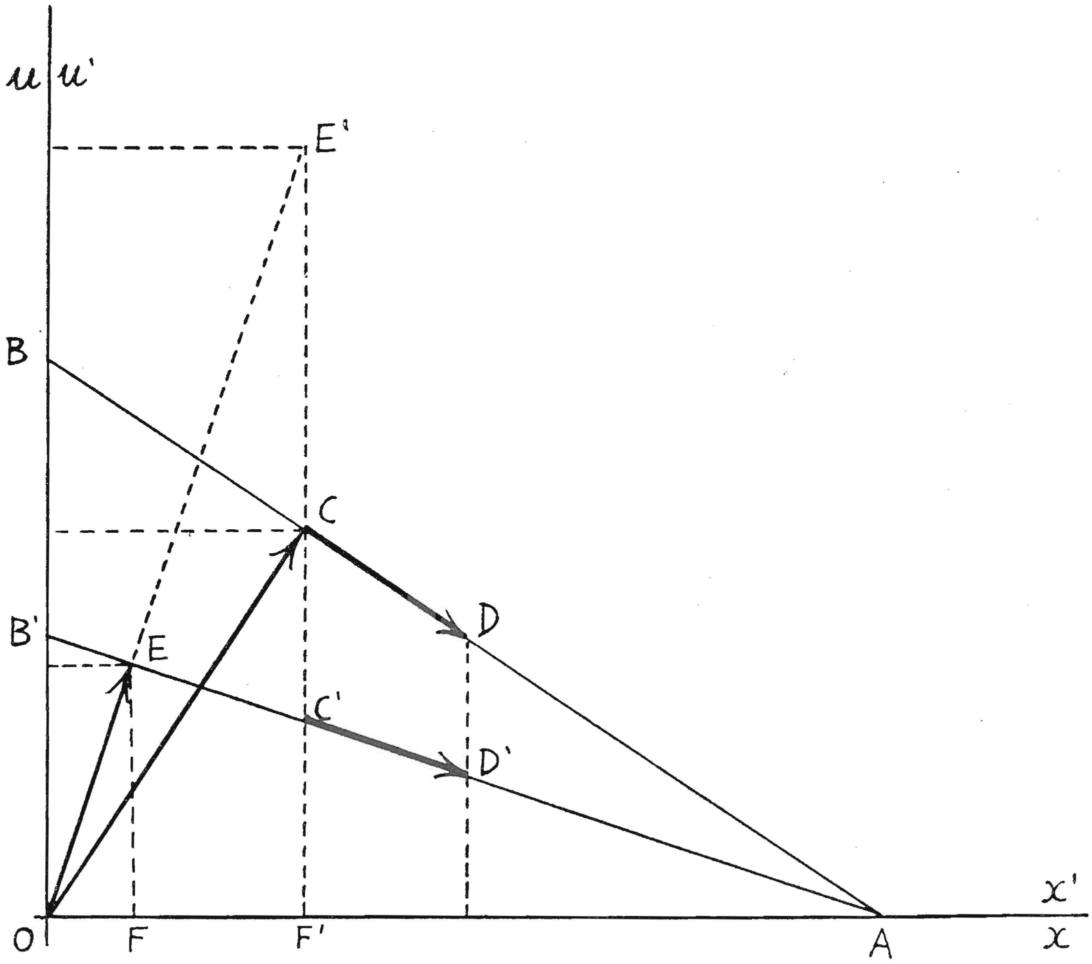

Figura 2.ª

Escribimos, como es costumbre, los índices en la parte superior para indicar la contravariancia, y en la inferior, para indicar la covariancia. Del mismo modo se transforman los componentes covariantes en contravariantes, mediante la fórmula:

$$B^u = k^2 B_u$$

Ahora es posible definir el producto escalar de dos vectores de distinta variancia:

$$A \,.\, B = A_x B^x + \ldots \quad = A^x B_x + \ldots$$

y el módulo de un vector multiplicándolo escalarmente por sí mismo:

$$A^2 = (A^x)^2 + (A^y)^2 + \frac{1}{k^2} (A^u)^2 = (A_x)^2 + (A_y)^2 + k^2 (A_u)^2$$

donde se reconocen los mismos invariantes obtenidos antes; este invariante, en cualquiera de sus dos formas, representa, pues, mejor el módulo de un vector que la distancia entre dos puntos, que como sabemos, no es invariante.

Tensores.—Hay que decir unas palabras sobre los tensores, pues si en el campo euclídeo, con coordenadas cartesianas rectangulares, el producto vectorial de dos vectores no se distingue de un vector, en espacios más generales, como el nuestro, dicho producto conduce a tensores especiales de segundo orden.

El tensor más sencillo se obtiene multiplicando todos los componentes de un vector por todos los de otro (producto diádico o indefinido de vectores). Si ambos son contravariantes, también lo es el tensor; si son covariantes, el tensor es covariante y, si son de distinta variancia, el tensor se llama mixto.

El producto vectorial de dos vectores contravariantes es la parte hemisimétrica de su producto diádico (salvo el factor $\frac{1}{2}$); sus tres únicos componentes esencialmente diferentes se transforman como los componentes de un vector covariante, salvo un factor igual al determinante de la matriz (9). Análogamente, el producto vectorial de dos vectores covariantes equivale a un vector contravariante, salvo la misma restricción. Cuando dicho determinante valga la unidad, la equivalencia del producto vectorial con un vector de variancia inversa es perfecta; en particular, en el campo euclídeo, donde puede prescindirse de la variancia, el producto vectorial no se distingue en nada de un verdadero vector; por el contrario, siendo el determinante de toda transformación permitida en un diagrama mixto igual a γ, el producto vectorial debe ser considerado como tensor.

Vectores fundamentales.—Es necesario repetir aquí las consideraciones que hicimos al principio respecto de la posibilidad de la representación geométrica: cuando queremos representar un vector de naturaleza física, tenemos que multiplicar previamente por un coeficiente apropiado, que transforme dicha magnitud en otra geométrica; en el caso particular de querer representar velocidades, tenemos que multiplicar por un coeficiente de dimensión tiempo. Esto lo está haciendo todo el mundo instintivamente.

Y dicho esto, pasemos a definir los vectores fundamentales de la Cinemática.

Velocidad mixta.—Multiplicando por $\dfrac{n}{dt}$ los componentes del vector diferencial de posición, se obtienen los componentes de un vector finito (y que me perdonen los matemáticos la falta de rigor expositivo), que podemos denominar *velocidad mixta*. El factor n es el factor de transformación, que tiene las dimensiones del tiempo; se puede omitir si se conviene en tomarlo igual a la unidad. El carácter vectorial del ente así constituído, es evidente, lo mismo que su contravariancia, ya que n y dt son escalares. Los componentes espaciales son los mismos de la velocidad ordinaria (10); la componente temporal vale:

$$V^u = \frac{kdt}{dt} = k$$

es decir, que la velocidad mixta tiene por proyección espacial la velocidad ordinaria y su proyección temporal es constante, idéntica para todos los móviles, e igual al coeficiente k, característico de cada diagrama particular considerado. Se sobreentiende que también ella tiene que multiplicarse por la nueva constante n, necesaria bajo el punto de vista dimensional, la cual sólo ha desaparecido gracias al convenio adicional $n = 1$.

Aceleración mixta.—Repitiendo la misma operación, llegamos a la aceleración mixta (11). Los componentes espaciales vuelven a dar la aceleración ordinaria, mientras que su componente temporal es siempre nula, por ser constante la componente homóloga de la velocidad. De aquí resulta que la aceleración mixta es un vector de naturaleza espacial, es decir, paralelo al plano xy, e idéntico a la aceleración ordinaria.

Trayectorias mixtas.—Si eliminamos el tiempo entre las tres ecuaciones paramétricas del movimiento de un punto (la última, común a todos los móviles, es sencillamente $u = kt$), obtendremos dos nuevas ecuaciones que relacionan las tres variables x y u; la curva representada por ellas es la que hemos llamado al principio *trayectoria mixta*; su proyección sobre el plano xy es la trayectoria ordinaria, cuya ecuación resulta de eliminar u entre las dos ecuaciones que definen la trayectoria mixta. La trayectoria mixta representa, por sí sola, la ley completa del movimiento.

Vamos a dar algunas ilustraciones elementales, escogiendo los movimientos más sencillos y conocidos. En el movimiento uniforme la trayectoria mixta es una línea recta (fig. 3). En general, cualquier movimiento rectilíneo posee una trayectoria mixta plana, contenida en un plano paralelo al eje u, que puede identificarse con uno de los planos coordenados; aquí tenemos la representación del movimiento uniforme acelerado (fig. 4), su trayectoria mixta es una parábola, y con ella puede comprobarse que la aceleración, que es sensiblemente proporcional a la diferencia de velocidades correspondientes a puntos

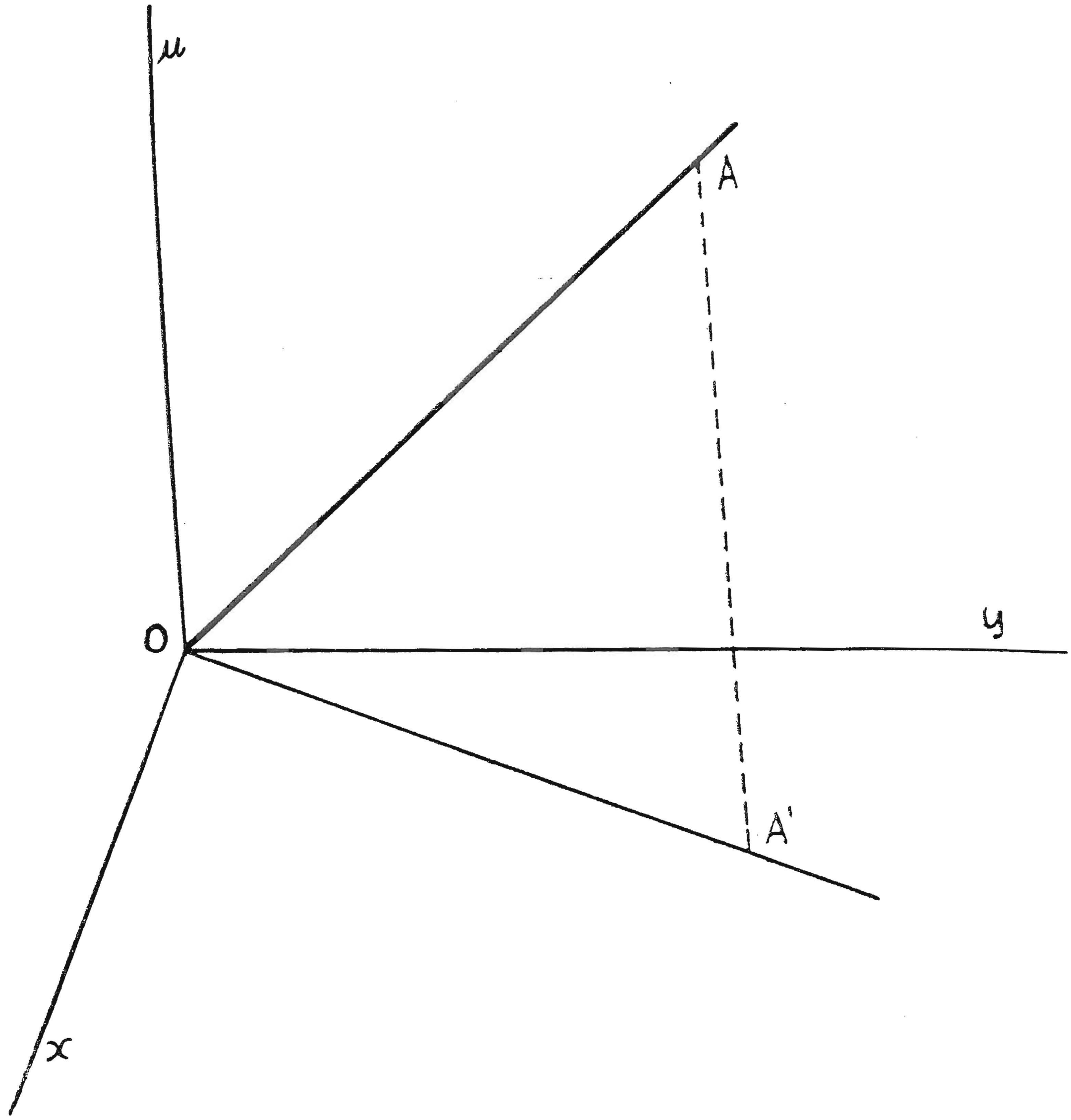

Figura 3.ª

equidistantes sobre el eje *u*, es un vector de longitud constante y dirección horizontal, de acuerdo con lo dicho antes sobre la naturaleza espacial de la aceleración mixta (12). Otro ejemplo lo obtenemos del movimiento circular uniforme (fig. 5). La trayectoria mixta es una hélice de paso constante; la proyección horizontal es, naturalmente, la circunferencia-trayectoria; el módulo de la velocidad mixta y la pendiente de la curva son constantes; la aceleración es un vector horizontal de módulo constante y dirigido siempre hacia el eje *u* (13).

Medios continuos. Gradiente mixto.—Si consideramos un campo escalar definido por una función uniforme de *x* y *u*, podemos llamar *gradiente mixto* al ente definido por las derivadas parciales con rela-

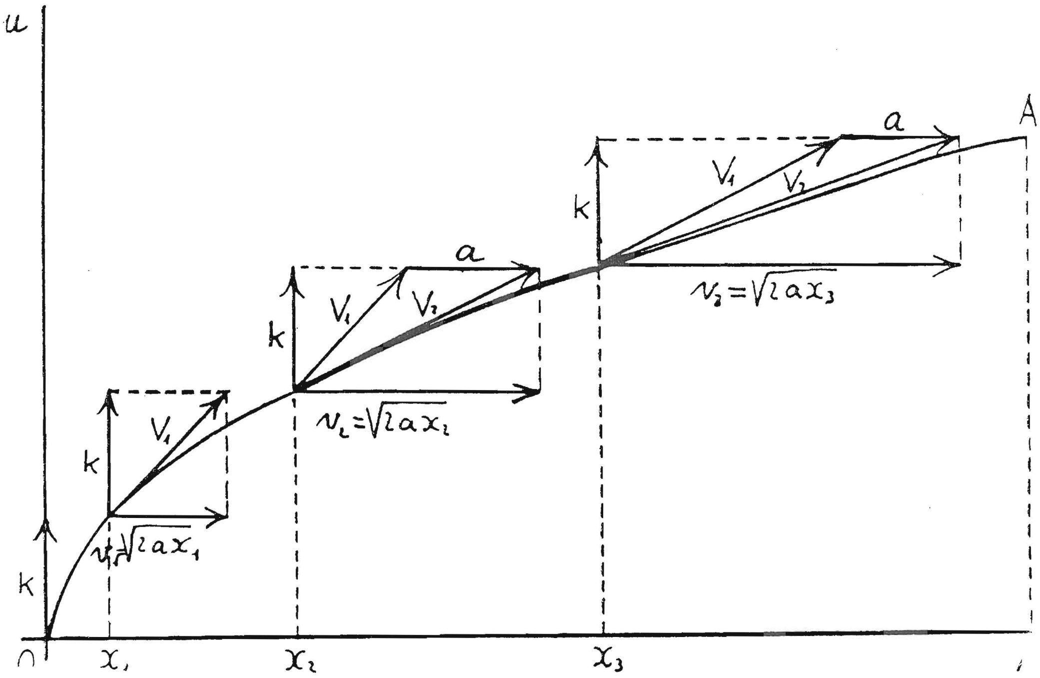

Figura 4.ª

ción a las tres coordenadas. Las derivadas con relación a x y, nos vuelven a dar el gradiente ordinario; la derivada con relación a u vale:

$$\frac{\delta m}{\delta u} = \frac{1}{k} \frac{\delta m}{\delta t}$$

y representa lo que en Meteorología llamamos la *tendencia* (14). Nos parece muy interesante esta posibilidad de refundir en el gradiente mixto los dos operadores independientes *gradiente* y *tendencia* y consideramos que esta posibilidad revela las más prometedoras ventajas del diagrama mixto.

La magnitud definida es un vector covariante (15), como es fácil comprobar atendiendo a la fórmula de transformación aplicable a su componente temporal:

$$\frac{\delta m}{\delta u} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta m}{\delta u'}$$

Es evidente e importante que la perpendicularidad se conserva, es decir, que el gradiente mixto es perpendicular a cualquier vector contenido en la superficie equiescalar que pasa por su origen; basta escri-

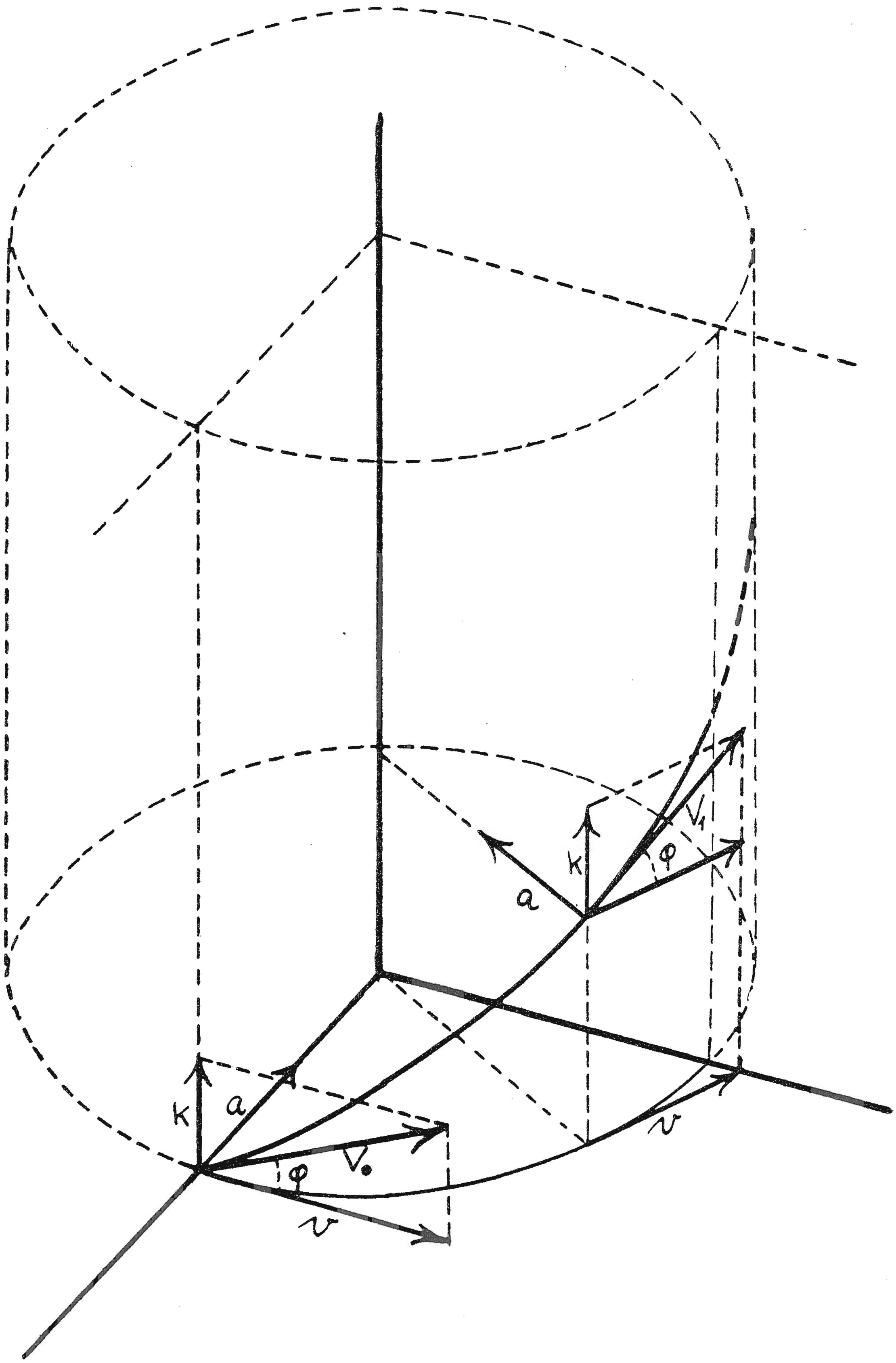

Figura 5.ª

bir la fórmula de la diferencial total, que equivale a la condición de perpendicularidad y que conserva su forma al aplicarle una transformación de coordenadas permitida (16).

Flujo potencial.—En Cinemática tiene importancia la consideración del flujo potencial, en el cual los componentes de la velocidad son las derivadas de un escalar. En el caso del diagrama mixto, siendo la velocidad un vector contravariante, no puede resultar como gradiente de un escalar. Es necesario usar un artificio que consiste en formar la *velocidad covariante,* cuyas componentes espaciales son idénticas a las de la velocidad ordinaria y cuya componente temporal vale:

$$V_u = \frac{1}{k^2} V^u$$

Diremos que el flujo es potencial cuando existe una función de x y u, cuyas derivadas parciales representan las componentes de la velocidad covariante en cada punto. Como se tiene necesariamente $V^u = k$ y, por tanto, $V_u = \frac{1}{k}$ las únicas funciones que pueden desempeñar el papel de potencial de velocidades son del tipo:

$$\Phi = \varphi\,(x\,y) + \frac{u}{k}$$

que corresponde al régimen permanente. Recíprocamente, el flujo estacionario potencial es también potencial en el diagrama mixto, y la función potencial se forma sumando sencillamente al potencial ordinario (que no depende del tiempo y, por tanto, tampoco de u), el término $\frac{u}{k}$. Si el potencial de velocidad en el espacio espacial depende del tiempo, el flujo en el diagrama mixto no es potencial.

Divergencia mixta.—El operador ∇ generalizado funciona como un vector covariante y, por tanto, se puede multiplicar escalarmente por un vector contravariante, como lo es la velocidad, siendo el producto un escalar, que se denominará *divergencia mixta*. Su invariancia está asegurada formalmente siguiendo el camino clásico, que es válido. Ahora bien, como la componente temporal de la velocidad es constante, su derivada es nula y, por tanto, la divergencia mixta coincide completamente con la divergencia ordinaria (17). El teorema de Gauss no añade nada nuevo, ya que el flujo de la componente temporal a través de una superficie cerrada es también nulo y el teorema no trasciende del espacio espacial.

Rotacional mixto.—Análogamente, la multiplicación vectorial del operador ∇ generalizado por un vector covariante, produce un tensor hemisimétrico que se designa por *rotacional mixto*. Es necesario que el vector sea covariante porque el vector simbólico lo es. Si se desea formar el rotacional de un vector contravariante, es preciso preparar previamente sus componentes covariantes. En realidad, basta tener en cuenta el componente temporal, pues el cambio de variancia no afecta a los componentes espaciales. Si se trata de la velocidad, ni siquiera hace falta esto, pues dicha componente temporal es constante (18).

Los componentes espaciales del rotacional representan la tendencia de la velocidad, o sea, su variación con relación al tiempo, mientras que su componente temporal se identifica con el rotacional ordinario. Aquí se repite la fusión de dos operadores que hasta ahora habían permanecido independientes: el *rotacional* ordinario y la *tendencia* de la velocidad. Lo que el gradiente mixto es para un escalar, es el rotacional mixto para un vector.

El teorema de Stokes es válido en el diagrama mixto. Para convencerse basta proyectar el circuito de integración sobre los tres planos coordenados; la proyección sobre el plano espacial da la circulación de la velocidad ordinaria y el flujo del rotacional, también ordinario, es decir, agota el contenido del teorema clásico; las proyecciones sobre los planos mixtos conducen a identidades. Por otra parte, como la contribución de la componente temporal a la integral es nula, se puede prescindir de ella, y enunciar el teorema en términos que parecen a primera vista algo contradictorios: *la circulación de la velocidad ordinaria a lo largo de un circuito cerrado es igual al flujo del rotacional mixto de la velocidad mixta que atraviesa el área limitada por el circuito*. Este enunciado posee un valor prognóstico por incluir términos que dependen del tiempo junto con otros que no. Lo mismo ocurre con el gradiente mixto.

Líneas de corriente.—En los medios continuos las líneas de corriente instantáneas se relacionan estrechamente con las trayectorias de las partículas, y coinciden con ellas cuando el régimen es permanente. Este enlace se hace evidente con el uso del diagrama mixto.

Las líneas de corriente están contenidas en planos paralelos a $x\ y$, es decir, son de naturaleza espacial pura, mientras que las trayectorias atraviesan dichos planos. Por un punto cualquiera del diagrama pasa una línea de corriente y una trayectoria mixta. Aquí tenemos un ejemplo simplificado (fig. 6). Se trata de un torbellino móvil, sin variación intrínseca. La línea inclinada representa la trayectoria mixta del

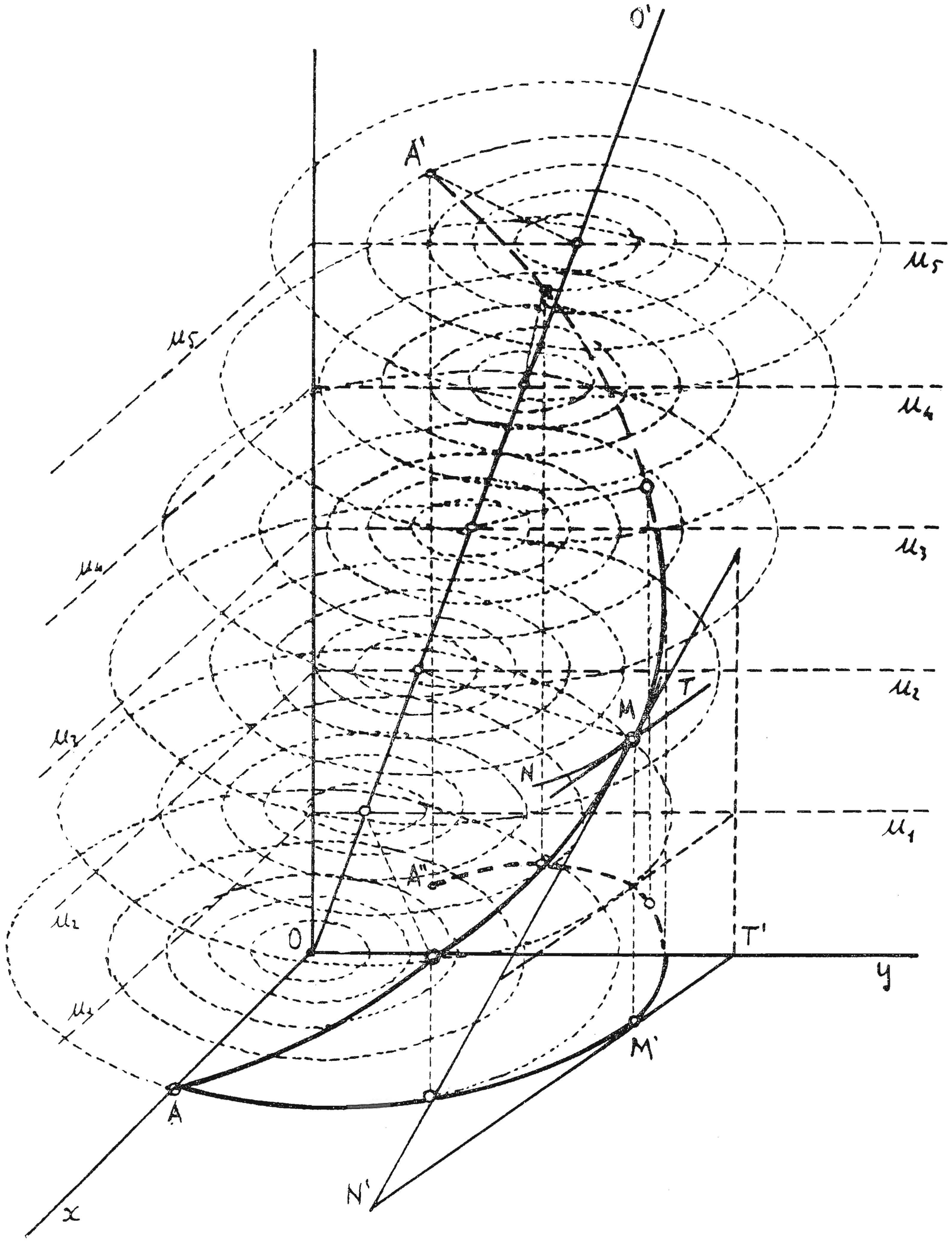

Figura 6.ª

centro. Consideremos un punto cualquiera M, que está situado en el tercer plano de los aquí representados; la línea de corriente que pasa por M está contenida en dicho plano; su tangente, también; en cambio, si proyectamos sobre el plano espacial inicial la trayectoria mixta que pasa por M, obtenemos la trayectoria ordinaria con su tangente en M_1. Estas dos tangentes son coplanarias con la tangente a la trayectoria mixta en M, y este sencillo hecho revela intuitivamente todas las relaciones existentes entre líneas de corriente y trayectorias, tan difíciles de puntualizar y tan confusas cuando sólo se utiliza un diagrama plano.

Programa futuro.—Y con esto damos por terminada la disertación. No es que la materia esté agotada; en realidad, no se ha hecho más que esbozarla. Al empezar hemos hablado de un gran número de restricciones impuestas a nuestra tarea. Estas restricciones tendrán que ir siendo canceladas a medida que la investigación prosiga. Por un lado, será necesario abordar la cuarta dimensión, con la grave pérdida que implica la renuncia a todo recurso intuitivo. Por otra parte, no podemos olvidar que el uso de coordenadas cartesianas rectangulares en Meteorología tiene un alcance muy restringido y que el estudio de los problemas a escala mundial exige el uso de coordenadas esféricas, y en el diagrama mixto correspondiente, de coordenadas hipercilíndricas.

Aparte de esto, habrá que construir la Dinámica, que será donde se encontrarán nuevas relaciones, que no solamente ilustrarán los procedimientos conocidos de previsión, sino que también pueden conducir a la formulación de algunas reglas nuevas; piénsese, por ejemplo, en la forma que van a tomar los teoremas de circulación y vorticidad. No se olvide que todos los diagramas que se usan o pueden usarse en la práctica cotidiana, incluso los puramente geométricos, son tributarios del diagrama mixto completo; son simplemente secciones de dicho diagrama. A este respecto y para terminar, quiero señalar un hecho curioso, y es que incluso las secciones oblícuas de este diagrama son susceptibles de interpretación útil; efectivamente, el sondeo hecho con avión, llamado sondeo horizontal, conduce a la formación de un diagrama especial equivalente a una sección oblícua del diagrama mixto, una de cuyas coordenadas representa un tiempo ficticio, con la dimensión física del tiempo real. Este hecho nos parece bastante significativo y viene a corroborar la idea de que el diagrama mixto no se reduce a una amalgama artificiosa del espacio con el tiempo, sino que constituye una estructura orgánica y natural.

N O T A S

(1) La transformación completa a la que nos referimos es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= x_o + x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= y_o + x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \\ u &= u_o \qquad\qquad\qquad\qquad + \gamma u' \end{aligned}$$

Es lineal, pero no la transformación lineal general; tampoco es ortogonal, pues las condiciones de ortogonalidad sólo se cumplen para los coeficientes dc x' y de y'.

(2) La distancia entre dos puntos se transforma de acuerdo con la ecuación:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (u_2 - u_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + \gamma^2 (u'_2 - u'_1)^2$$

y la pendiente con relación al plano $x\, y$:

$$tg\,\varphi = \gamma\, tg\,\varphi'$$

(3) El invariante ligado a un par de puntos puede escribirse así:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \cot^2\varphi\,(u_2 - u_1)^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + \\ &+ \cot^2\varphi'\,(u'_2 - u'_1)^2 \end{aligned}$$

o bien así:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{k^2}(u_2 - u_1)^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{k'^2}(u'_2 - u'_1)^2 \end{aligned}$$

(4) La transformación directa para vectores contravariantes es la siguiente:

$$\begin{aligned} A^x &= \cos\theta \,.\, A^{x'} - \operatorname{sen}\theta \,.\, A^{y'} \\ A^y &= \operatorname{sen}\theta \,.\, A^{x'} + \cos\theta \,.\, A^{y'} \\ A^u &= \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma A^{u'} \end{aligned}$$

y la inversa:

$$\begin{aligned} A^{x'} &= \cos\theta \,.\, A^x + \operatorname{sen}\theta \,.\, A^y \\ A^{y'} &= -\operatorname{sen}\theta \,.\, A^x + \cos\theta \,.\, A^y \\ A^{u'} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{\gamma} A^u \end{aligned}$$

Para vectores covariantes, la directa es:

$$\begin{aligned} B_x &= \cos\theta \,.\, B_{x'} - \operatorname{sen}\theta \,.\, B_{y'} \\ B_y &= \operatorname{sen}\theta \,.\, B_{x'} + \cos\theta \,.\, B_{y'} \\ B_u &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{\gamma} B_{u'} \end{aligned}$$

y la inversa:

$$\begin{aligned} B_{x'} &= \cos\theta \,.\, B_x + \operatorname{sen}\theta \,.\, B_y \\ B_{y'} &= -\operatorname{sen}\theta \,.\, B_x + \cos\theta \,.\, B_y \\ B_{u'} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma B_u \end{aligned}$$

Estas fórmulas son un caso particular de las que corresponden a la transformación lineal general caracterizada por las matrices:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}$$

siendo los términos de la segunda los adjuntos de sus correspondientes de la primera divididos por el determinante de la matriz, es decir, la matriz inversa. Es de notar que la primera es, a su vez, inversa de la segunda.

Los vectores contravariantes se transforman de acuerdo con las fórmulas:

$$\begin{gathered} A^x = \alpha_{11} A^{x'} + \alpha_{12} A^{y'} + \alpha_{13} A^{u'} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ A^{x'} = A_{11} A^x + A_{21} A^y + A_{31} A^u \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{gathered}$$

y los covariantes, de acuerdo con estas otras:

$$\begin{gathered} B_x = A_{11} B_{x'} + A_{12} B_{y'} + A_{13} B_{u'} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ B_{x'} = \alpha_{11} B_x + \alpha_{21} B_y + \alpha_{31} B_u \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{gathered}$$

(5) La ecuación de un plano en función de los segmentos m, n, p, que determina sobre los ejes, tiene la forma:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{u}{p} = 1$$

Apliquemos un cambio de ejes (conservando el origen); la ecuación del plano, según (1), será:

$$\frac{\cos\theta \,.\, x' - \operatorname{sen}\theta \,.\, y'}{m} + \frac{\operatorname{sen}\theta \,.\, x' + \cos\theta \,.\, y'}{n} + \frac{\gamma\, u'}{p} = 1$$

o bien:

$$\left(\frac{\cos\theta}{m} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{n}\right) x' + \left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{m} + \frac{\cos\theta}{n}\right) y' + \frac{\gamma}{p} u' = 1$$

de donde:

$$\frac{1}{m'} = \cos\theta \,.\, \frac{1}{m} + \operatorname{sen}\theta \,.\, \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n'} = -\operatorname{sen}\theta \,.\, \frac{1}{m} + \cos\theta \,.\, \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{p'} = \gamma \frac{1}{p}$$

que corresponde al esquema (4) para vectores covariantes, quedando con esto demostrado que $\dfrac{1}{m}$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{p}$, son efectivamente los componentes covariantes de un vector.

(6) Si a^x, a^y, a^u son los componentes de un vector (contravariante) situado en el plano de coordenadas m, n, p, la condición de perpendicularidad se escribe así:

$$\frac{a^x}{m} + \frac{a^y}{n} + \frac{a^u}{p} = 0$$

y después de aplicar cualquier transformación permitida:

$$(a^{x\prime} \cos\theta - a^{y\prime} \operatorname{sen}\theta) \left(\frac{1}{m'} \cos\theta - \frac{1}{n'} \operatorname{sen}\theta \right) + (a^{x\prime} \operatorname{sen}\theta + a^{y\prime} \cos\theta) \,.$$

$$. \left(\frac{1}{m'} \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{n'} \cos\theta \right) + \gamma \,.\, a^{u\prime} \,.\, \frac{1}{\gamma} \,.\, \frac{1}{p'} = \frac{a^{x\prime}}{m'} + \frac{a^{y\prime}}{n'} + \frac{a^{u\prime}}{p'} = 0$$

(7) El invariante ligado a un par de puntos (vector contravariante) es:

$$x^2 + y^2 + \frac{u^2}{k^2}$$

(por comodidad uno de ellos se ha hecho coincidir con el origen) y de aquí se deduce el tensor métrico covariante:

$$\begin{array}{lll} g_{11} = i_x^2 = 1 & g_{12} = i_x \,.\, i_y = 0 & g_{13} = i_x \,.\, i_u = 0 \\ g_{21} = i_y \,.\, i_x = 0 & g_{22} = i_y^2 = 1 & g_{23} = i_y \,.\, i_u = 0 \\ g_{31} = i_u \,.\, i_x = 0 & g_{32} = i_u \,.\, i_y = 0 & g_{33} = i_u^2 = \dfrac{1}{k^2} \end{array}$$

(i_x, i_y, i_u son los vectores unitarios ligados a los ejes).

(8)

$$\begin{aligned} A_x &= g_{11} A^x + g_{12} A^y + g_{13} A^u = A^x \\ A_y &= g_{21} A^x + g_{22} A^y + g_{23} A^u = A^y \\ A_u &= g_{31} A^x + g_{32} A^y + g_{33} A^u = \frac{1}{k^2} A^u \end{aligned}$$

(9) El producto vectorial de A por B (contravariantes) es el tensor hemisimétrico:

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & S_{yu} & S_{ux} \\ -S_{yu} & 0 & S_{xy} \\ -S_{ux} & -S_{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{2} (A^x B^y - A^y B^x)$$

$$S_{yu} = \frac{1}{2} (A^y B^u - A^u B^y)$$

$$S_{ux} = \frac{1}{2} (A^u B^x - A^x B^u)$$

Sus elementos se transforman según el esquema:

$$S_{xy} = S_{x'y'} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + S_{x'u'} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + S_{u'y'} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

en todo cambio lineal de coordenadas, esquema que sólo se diferencia del correspondiente a un vector covariante por la falta del divisor

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Cuando sea $\Delta = 1$ el tensor queda asimilado totalmente a un vector covariante.

(10)

$$V = \frac{dR}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} V^x = \dfrac{dx}{dt} \\ V^y = \dfrac{dy}{dt} \end{array} \right\} = v \\ V^u = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{k\,dt}{dt} = k \end{array} \right.$$

(11)

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} A^x = \dfrac{dV^x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ A^y = \dfrac{dV^y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt} \end{array} \right\} = a \\ A^u = \dfrac{dV^u}{dt} = \dfrac{dk}{dt} = o \end{array} \right.$$

(12) La ecuación de la trayectoria mixta que corresponde a un movimiento uniformemente acelerado es:

$$u^2 = \frac{2k^2}{a} x$$

El módulo de la velocidad mixta vale:

$$|V| = \sqrt{k^2 + 2ax} = \sqrt{k^2 + \frac{a^2u^2}{k^2}}$$

y su inclinación sobre el eje x:

$$tg\,\varphi = \frac{k}{\sqrt{2ax}} = \frac{k^2}{au}$$

(13) Paso de la hélice $= kT$ (T = período).

Módulo de la velocidad mixta:

$$V = \sqrt{v^2 + k^2} = \text{constante}$$

Inclinación:

$$tg\,\varphi = \frac{k}{v} = \text{constante}$$

(14) Siendo $m = m\ (x,\ y,\ u)$ se tiene:

$$\overline{\text{grad.}}\ m = -\overline{\nabla}\, m = \left|\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} -\dfrac{\delta m}{\delta x} \\[2ex] -\dfrac{\delta m}{\delta y} \end{array}\right\} = -\nabla m \\[3ex] -\dfrac{\delta m}{\delta u} = -\dfrac{1}{k}\,\dfrac{\delta m}{\delta t} \end{array}\right.$$

Sobrerrayamos los símbolos $\overline{\text{grad.}}$ y $\overline{\nabla}$ para distinguirlos de los que se usan para designar el gradiente ordinario.

(15) Sea una transformación definida por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= x\,(x'\ y'\ u') \\ y &= y\,(x'\ y'\ u') \\ u &= u\,(x'\ y'\ u') \end{aligned}$$

donde x, y, u son funciones de x', y', u', sin más restricciones que las de ser uniformes y el sistema resoluble con relación a x', y', u'. Esta transformación es más general que la considerada en la nota (4). Las dos matrices inversas ligadas a esta transformación son:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta x'} & \dfrac{\delta x}{\delta y'} & \dfrac{\delta x}{\delta u'} \\[2ex] \dfrac{\delta y}{\delta x'} & \dfrac{\delta y}{\delta y'} & \dfrac{\delta y}{\delta u'} \\[2ex] \dfrac{\delta u}{\delta x'} & \dfrac{\delta u}{\delta y'} & \dfrac{\delta u}{\delta u'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta x'}{\delta x} & \dfrac{\delta y'}{\delta x} & \dfrac{\delta u'}{\delta x} \\[2ex] \dfrac{\delta x'}{\delta y} & \dfrac{\delta y'}{\delta y} & \dfrac{\delta u'}{\delta y} \\[2ex] \dfrac{\delta x'}{\delta u} & \dfrac{\delta y'}{\delta u} & \dfrac{\delta u'}{\delta u} \end{pmatrix}$$

El carácter contravariante de un vector está ligado al esquema:

$$A^x = A^{x'}\frac{\delta x}{\delta x'} + A^{y'}\frac{\delta x}{\delta y'} + A^{u'}\frac{\delta x}{\delta u'}$$

$$A^y = A^{x'}\frac{\delta y}{\delta x'} + A^{y'}\frac{\delta y}{\delta y'} + A^{u'}\frac{\delta y}{\delta u'}$$

$$A^u = A^{x'}\frac{\delta u}{\delta x'} + A^{y'}\frac{\delta u}{\delta y'} + A^{u'}\frac{\delta u}{\delta u'}$$

y a su recíproco:

$$A^{x'} = A^{x} \frac{\delta x'}{\delta x} + A^{y} \frac{\delta x'}{\delta y} + A^{u} \frac{\delta x'}{\delta u}$$

... ...

y el covariante a estos otros:

$$B_{x} = B_{x'} \frac{\delta x'}{\delta x} + B_{y'} \frac{\delta y'}{\delta x} + B_{u'} \frac{\delta u'}{\delta x}$$

$$B_{y} = B_{x'} \frac{\delta x'}{\delta y} + B_{y'} \frac{\delta y'}{\delta y} + B_{u'} \frac{\delta u'}{\delta y}$$

$$B_{u} = B_{x'} \frac{\delta x'}{\delta u} + B_{y'} \frac{\delta y'}{\delta u} + B_{u'} \frac{\delta u'}{\delta u}$$

$$B_{x'} = B_{x} \frac{\delta x}{\delta x'} + B_{y} \frac{\delta y}{\delta x'} + B_{u} \frac{\delta u}{\delta x'}$$

... ...

El vector infinitesimal ds (elemento de línea), es contravariante, pues se tiene evidentemente:

$$dx = \frac{\delta x}{\delta x'} dx' + \frac{\delta x}{\delta y'} dy' + \frac{\delta x}{\delta u'} du'$$

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x'} dx' + \frac{\delta y}{\delta y'} dy' + \frac{\delta y}{\delta u'} du'$$

$$du = \frac{\delta u}{\delta x'} dx' + \frac{\delta u}{\delta y'} dy' + \frac{\delta u}{\delta u'} du'$$

mientras que el gradiente es covariante, pues se tiene:

$$\frac{\delta m}{\delta x} = \frac{\delta m}{\delta x'} \frac{\delta x'}{\delta x} + \frac{\delta m}{\delta y'} \frac{\delta y'}{\delta x} + \frac{\delta m}{\delta u'} \frac{\delta u'}{\delta x}$$

$$\frac{\delta m}{\delta y} = \frac{\delta m}{\delta x'} \frac{\delta x'}{\delta y} + \frac{\delta m}{\delta y'} \frac{\delta y'}{\delta y} + \frac{\delta m}{\delta u'} \frac{\delta u'}{\delta y}$$

$$\frac{\delta m}{\delta u} = \frac{\delta m}{\delta x'} \frac{\delta x'}{\delta u} + \frac{\delta m}{\delta y'} \frac{\delta y'}{\delta u} + \frac{\delta m}{\delta u'} \frac{\delta u'}{\delta u}$$

En el caso particular de la transformación, nota (1), resulta:

$$\frac{\delta x'}{\delta x} = \cos . \theta \qquad \frac{\delta y'}{\delta x} = - \operatorname{sen} \theta \qquad \frac{\delta u'}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta x'}{\delta y} = \operatorname{sen} \theta \qquad \frac{\delta y'}{\delta y} = \cos \theta \qquad \frac{\delta u'}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta x'}{\delta u} = 0 \qquad \frac{\delta y'}{\delta u} = 0 \qquad \frac{\delta u'}{\delta u} = \frac{1}{\gamma}$$

y, por tanto,

$$\frac{\delta m}{\delta x} = \frac{\delta m}{\delta x'} \cos\theta - \frac{\delta m}{\delta y'} \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\delta m}{\delta y} = \frac{\delta m}{\delta x'} \operatorname{sen}\theta + \frac{\delta m}{\delta y'} \cos\theta$$

$$\frac{\delta m}{\delta u} = \frac{1}{\gamma}\frac{\delta m}{\delta u'}$$

(16) Si el vector ds se encuentra situado sobre la superficie equiescalar, la identidad:

$$\frac{\delta m}{\delta x} dx + \frac{\delta m}{\delta y} dy + \frac{\delta m}{\delta u} du = dm = o$$

expresa la condición de perpendicularidad entre dicho vector y el vector gradiente. Aplicando un cambio de coordenadas permtido resulta:

$$\frac{\delta m}{\delta x} dx + \frac{\delta m}{\delta y} dy + \frac{\delta m}{\delta u} du = \frac{\delta m}{\delta x'} dx' + \frac{\delta m}{\delta y'} dy' +$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\frac{\delta m}{\delta u'} . \gamma\, du' = \frac{\delta m}{\delta x'} dx' + \frac{\delta m}{\delta y'} dy' +$$

$$+ \frac{\delta m}{\delta u'} du' = o$$

y los nuevos vectores ds' y $\overline{\nabla} m$ siguen siendo perpendiculares.

(17) La divergencia mixta ($\overline{\text{div.}}$) del vector contravariante A está definida por la operación:

$$\overline{\text{div.}}\, A = \frac{\delta A^x}{\delta x} + \frac{\delta A^y}{\delta y} + \frac{\delta A^u}{\delta u}$$

y en el caso particular de la velocidad, por ser $\dfrac{\delta V^u}{\delta u} = o$:

$$\overline{\text{div.}}\, V = \frac{\delta V^x}{\delta x} + \frac{\delta V^y}{\delta y} = \frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} = \text{div.}\, v$$

(18) El operador rotacional mixto ($\overline{\text{rot.}}$) está definido por las fórmulas siguientes:

$$\overline{\text{rot.}}\, B = \overline{\nabla} \wedge B = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta B_u}{\delta y} - \dfrac{\delta B_y}{\delta u} \\[2ex] \dfrac{\delta B_x}{\delta u} - \dfrac{\delta B_u}{\delta x} \\[2ex] \dfrac{\delta B_y}{\delta x} - \dfrac{\delta B_x}{\delta y} \end{array} \right.$$

En el caso de la velocidad, recordando que $V_x = V^x$, $V_y = V^y$, $V_u =$ const. resulta:

$$\left.\begin{aligned}\overline{(\text{rot. V})}_x &= -\frac{\delta V^y}{\delta u} = -\frac{1}{k}\,\frac{\delta V^y}{\delta t}\\ \overline{(\text{rot. V})}_y &= \frac{\delta V^x}{\delta u} = \frac{1}{k}\,\frac{\delta V^x}{\delta t}\end{aligned}\right\} = -\frac{1}{k}\,.\,\text{tend. } v$$

$$(\text{rot. V})_u = \frac{\delta V^y}{\delta x} - \frac{\delta V^x}{\delta y} = -\,\text{rot. } v$$

De las dos primeras, derivando respectivamente con relación a x y con relación a y, y sumando se deduce:

$$\frac{\delta}{\delta x}\overline{(\text{rot. V})}_x + \frac{\delta}{\delta y}\overline{(\text{rot. V})}_y = \frac{1}{k}\,\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta V^x}{\delta y} - \frac{\delta V^y}{\delta x}\right) = \frac{1}{k}\,\frac{\delta}{\delta t}\,\text{rot. } v$$

o bien:

$$\frac{\delta}{\delta x}\overline{(\text{rot. V})}_x + \frac{\delta}{\delta y}\overline{(\text{rot. V})}_y = -\frac{1}{k}\,\frac{\delta}{\delta t}\,\overline{(\text{rot. V})}_u = -\frac{\delta}{\delta u}\,\overline{(\text{rot. V})}_u$$

es decir:

$$\overline{\text{div.}}\ \overline{\text{rot.}}\,\text{V} = o$$

de acuerdo con una fórmula clásica de cálculo vectorial. Recíprocamente, partiendo de esta fórmula podía haberse establecido la anterior.

Fig. 1.—Transformaciones permtidas: desplazamiento del origen, rotación alrededor del eje temporal; cambio de escala sobre este eje.

Fig. 2.—Perpendicularidad de vectores.
Si se hace $u = 2u'$, el vector CD se transforma en C'D', mientras que OC, considerado como distancia de la recta AB al origen, se transforma en OE.

$$\text{OA} = m$$

$$\text{OB} = p$$

$$\left.\begin{aligned}\text{OF}' &= \frac{p^2}{m^2 + p^2}\,.\,m\\ \text{F'C} &= \frac{m^2}{m^2 + p^2}\,.\,p\end{aligned}\right\} \quad \frac{\text{F'C}}{\text{OF}'} = \frac{m}{p}$$

$$\text{OA} = m' = m$$

$$\text{OB}' = p' = \frac{p}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{OF} &= \frac{p^2/4}{m^2 + p^2/4}\,.\,m\\ \text{FE} &= \frac{m^2}{m^2 + p^2/4}\,.\,\frac{p}{2}\end{aligned}\right\} \quad \frac{\text{FE}}{\text{OF}} = 2\,\frac{m}{p} = \frac{\text{F'E'}}{\text{OF}'}$$

Fig. 3.—Movimiento rectilíneo uniforme.

OA, trayectoria mixta

OA', trayectoria ordinaria

Fig. 4.—Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

OA, trayectoria mixta

OA', trayectoria real

V_2, es la resultante de V_1 y del vector constante horizontal a.

Fig. 5.—Movimiento circular uniforme.

V_0, V_1, velocidad mixta

v, v, velocidad real

a, aceleración.

Fig. 6.—Líneas de corriente y trayectorias.

OO', trayectoria mixta del centro

AA', trayectoria mixta de un punto

AA'', trayectoria real del mismo punto

Líneas de puntos, líneas de corriente para distintos valores de u (momentos sucesivos).

MN, línea de corriente que pasa por el punto M, situado en el plano $u = u_2$

MN', tangente a la trayectoria mixta

MT, tangente a la línea de corriente

N'T', tangente a la trayectoria real.