

ANÁLISIS WAVELET DE LA PRECIPITACIÓN EN LA PENÍNSULA IBÉRICA

Ana MORATA*, M^a Luisa MARTÍN*, M^a Yolanda LUNA*, Mar FENOY** y Vicente QUESADA**

**Dpto. Astrofísica y CC. de la Atmósfera, Facultad de CC. Físicas, Universidad Complutense de Madrid. ** Dpto. Estadística e Investigación Operativa, Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.*

RESUMEN

Se ha estudiado la variabilidad climática en la Península Ibérica mediante un análisis *wavelet*. El conjunto de datos está formado por series precipitación mensual de la Península Ibérica y las Islas Baleares. Aparecen diferencias no sólo en los análisis *wavelet* continuo y discreto, sino también los resultados son distintos para distintas zonas de la Península. Como consecuencia de esto se ha dividido el territorio peninsular en dos regiones: la región Atlántica y la región Mediterránea y se ha realizado el análisis continuo y discreto en ambas. Se pueden observar fuertes diferencias en la intensidad de los coeficientes *wavelet* en las dos regiones, así como en la variabilidad que muestran. En la región Mediterránea aparecen variaciones más intensas para grandes escalas temporales mientras que en la región Atlántica las escalas temporales más destacadas son más cortas. Estas características se observan tanto en el tratamiento discreto como en el continuo.

Palabras clave: transformada *wavelet*, *wavelet* continua, análisis de multirresolución, precipitación, Península Ibérica.

ABSTRACT

Climate variability in the Iberian Peninsula has been analysed by means of a wavelet analysis. The dataset consists monthly totals precipitation including the Iberian Peninsula and Balearic Islands. Both continuous and discrete wavelet transforms have been applied in order to study different features of frequencies in the dataset. It can be observed several differences not only in both wavelet analyses but also in results of the Iberian zones. As these results, the study has been divided taking into account two different regions in Iberia: the atlantic and the mediterranean areas for both types of wavelet transforms. It can be noted strong differences between the variability intensities of wavelet coefficients in two separated areas. Thus, the intensity of variations is stronger in the Mediterranean areas than in Atlantic zones on shorter time-scales. These features have been observed in both continuous and discrete treatment.

Key words: *wavelet transform, continuous wavelet, multiresolution analysis, precipitation, Iberian Peninsula.*

1. INTRODUCCIÓN

La precipitación se produce por procesos atmosféricos altamente no lineales que tienen lugar a diferentes escalas. Los patrones de precipitación exhiben una estructura jerarquizada y muy localizada mostrando alta variabilidad a diferentes escalas. Uno de los principales objetivos de la climatología es la comprensión de la variabilidad y los rangos de las escalas que presenta la precipitación. Varios autores han estudiado las fluctuaciones en los procesos de precipitación caracterizando su comportamiento en determinadas escalas para con ello conocer mejor el comportamiento a otras escalas (WAYMIRE, 1985; LOVEJOY y SCHERTZER, 1990; GUPTA y WAYMIRE, 1990).

Debido a las características que presenta la precipitación, tales como intermitencia, inhomogeneidad y anisotropía, el análisis multirresolución de *wavelet* permite obtener los modos dominantes de variabilidad y su evolución en el tiempo, proporcionando una herramienta adecuada para estudiar la detección de estructuras coherentes, es decir, autosimilares, de la precipitación (MEYER, 1988; MALLAT, 1989). La detección de estas estructuras requiere el estudio de los procesos a diferentes escalas pero, en general, los conjuntos de datos están contruidos para una escala en particular, lo que hace necesaria una transformación de los datos a otra escala. Para esto, el análisis multirresolución aplica la transformación mediante una operación de convolución y la bondad de la transformación se estima mediante mínimos cuadrados. Cuando algunas transformaciones, tales como filtrado, análisis mediante funciones ortogonales empíricas, etc, son utilizadas para capturar una “señal” en un proceso, la información significativa para identificar autosimilaridad se puede perder. El análisis multirresolución permite capturar esta información considerándola como fluctuaciones del proceso. El objetivo es determinar la variabilidad de la precipitación aplicando un análisis de *wavelet* al conjunto de datos de la Península Ibérica. El tratamiento se realiza mediante dos técnicas de análisis de *wavelet*, continuo y discreto. Este análisis permite transformar funciones de tiempo unidimensionales en funciones bidimensionales de tiempo y escala o frecuencia, por analogía con el análisis de Fourier.

En la segunda sección de este trabajo se describen brevemente los datos y la metodología utilizados. En la tercera se exponen los principales resultados y finalmente se resumen los principales resultados en la sección 4.

2. DATOS Y METODOLOGÍA

El método de transformación *wavelet* (*TW*) fue introducido por MORLET *et al.* (1982) y GROSSMAN y MORLET (1984). En este estudio comenzaremos definiendo el análisis *wavelet* continuo, porque aunque el discreto presenta un interés relevante en los estudios científicos, conocer las transformaciones continuas y sus propiedades es interesante puesto que muchas de sus propiedades son análogas a las discretas. Por ejemplo el análisis de series temporales ha sido formulado en términos de las transformaciones *wavelets* continuas (HOUDRÉ, 1993; CAMBANIS y MASRY 1994; CAMBANIS y HOUDRÉ, 1995).

Esta técnica ha sido también utilizada en el análisis de señales y de imágenes. En ciencias atmosféricas, se han utilizado estas técnicas para estudiar una gran variedad de fenómenos tales como capa límite planetaria o frentes fríos (MAHRT, 1991; KUMAR y FOUFOULA-GEORGIU, 1993; GAMAGE y BLUMEN, 1993). Habiéndose probado por tanto las ventajas de este método, esto es, la *TW* muestra estructuras a diferentes escalas de tiempo en diferentes posiciones temporales, mientras que la transformada de Fourier tradicional ofrece información solamente de la frecuencia, perdiendo información acerca de la variación temporal. El análisis *wavelet* es una nueva forma de representar funciones locales en tiempo y en frecuencia, mientras que las funciones senos y cosenos de Fourier son locales en frecuencia pero globales en el tiempo.

2.1 Análisis continuo de Wavelets

Sea , $\psi_{a,b}(x)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ una familia de funciones definidas a través de $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, de la siguiente forma,

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

La normalización que aparece en la definición anterior asegura que $\|\psi_{a,b}(x)\|$ es independiente de a y b . Supongamos que la función ψ (llamada función *wavelet* o *wavelet* madre) satisface la siguiente condición de admisibilidad,

$$C_\psi = \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d(\omega) < \infty$$

donde Ψ es la transformación de Fourier de ψ . La condición de admisibilidad implica que,

$$0 = \Psi(0) = \int \psi(x) dx$$

Si $0 = \int \psi(x) dx$ y $\int (1+|x|^\alpha) |\psi(x)| dx < \infty$ para algún $\alpha > 0$, se tiene que $C_\psi < \infty$.

Esta propiedad de la función ψ , $0 = \int \psi(x) dx$, motiva el nombre de *wavelet*.

Para cualquier función $f(x)$ en L_2 , la transformación *wavelet* continua es definida como una función de dos variables

$$CWT_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx$$

Donde el parámetro de escala, a , y el parámetro de localización, b , varían sobre el espacio $\mathbb{R}-\{0\}$ x \mathbb{R} . Si la condición de admisibilidad se satisface, es decir, $C_\psi < \infty$, la transformación continua vía la identidad de Calderón's es,

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int CWT_f(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{dad b}{a^2}$$

La banda de frecuencias tiene una serie constante sobre la escala logarítmica (MALLAT, 1989). Así, si la escala a es pequeña (grande), la resolución en el ámbito espacial es gruesa (fina) y fina (gruesa) en el ámbito de las frecuencias.

2.2 Análisis de multiresolución *Wavelet*

Un marco teórico de trabajo de fundamental importancia para mostrar la transformación *wavelet*, es el Análisis Multiresolución de Mallat (*MRA*). Una aproximación multiresolución de $L^2(\mathbb{R})$ es una secuencia $(V_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ tales que verifiquen:

$$i) \quad V_m \subset V_{m+1}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$ii) \quad \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} V_m \text{ es denso en } L^2(\mathbb{R}) \text{ y } \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} V_m = \{0\}$$

$$iii) \quad f(x) \in V_j \text{ si y sólo si } f(2x) \in V_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$iv) \quad f(x) \in V_m \Rightarrow f\left(x - \left[\frac{k}{2^m}\right]\right) \in V_m, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$v) \quad \exists \text{ I isomorfismo de } V^0 \text{ en } l^2(\mathbb{Z}) \text{ que conmuta con la acción de } \mathbb{Z}.$$

La aproximación de una función $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ en la resolución m viene dada por la proyección ortogonal de $f(x)$ en V_m por la cual tenemos 2^m puntos por unidad de longitud. Sea P_m el operador que representa esta proyección, esto es, si $f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow P_m f \in V_m \subset L^2(\mathbb{R})$

$$P_m f = P_m \cdot f + g_{m-1}$$

donde g_{m-1} es el “residuo” entre dos aproximaciones. Como consecuencia de la propiedad i), $P_m \cdot f$ contiene la información necesaria para calcular $P_m f$, que es la mejor aproximación de $f(x)$ en el sentido de los mínimos cuadrados.

Existe una única función $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, denominada función de escala porque sus cambios de escala y localización constituyen una base ortonormal para todos los espacios V_m . Esta función es denominada *wavelet* padre.

Si ϕ es definida tal que, $\int \phi(x) dx \neq 0$, como $V_0 \subset V_1$, por la propiedad v), la función $\phi(x) \in V_0$ puede ser representada como una combinación lineal de funciones de V_1 , es decir,

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de escala, y es fundamental para construir y examinar las *wavelets*. Los coeficientes h_n son importantes para relacionar el *MRA* con la teoría de señales. El vector $\underline{h} = \{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ será denominado filtro *wavelet*.

Definimos la función m_0 como sigue

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega)$$

esta función, denominada *función de transferencia*, describe el comportamiento del filtro asociado h en el ámbito de Fourier.

Daubechies planteó un polinomio basado en $m_0(\omega)$ en el que ningún sistema ϕ, ψ puede ser simétrico y de soporte compacto al mismo tiempo. Sin embargo es posible construir *wavelet* “más simétricas” con soporte compacto. Este tipo de *wavelets* tienen el nombre de familia *symmlet*. En el presente trabajo, hemos empleado la familia *symmlet* que es cuasi-simétrica y proporciona soporte compacto. El análisis *wavelet* ha sido aplicado a datos de precipitación proporcionados por el Southwestern Europe Dataset (*SED*) de GONZÁLEZ-ROUCO *et al.* (2001) consistente en 92 series temporales que cubren prácticamente la Península Ibérica, sur de Francia y norte de Africa. Estas series han sido sometidas a un control de calidad que incluye tratamiento de datos anómalos, homogeneización e interpolación. Los datos son de precipitación mensual acumulada y abarcan el periodo 1899-1989. Los cálculos se realizaron sobre anomalías estandarizadas para cada serie.

3. RESULTADOS

Esta sección describe los resultados obtenidos mediante análisis de *wavelet* al que ha sido sometida la base de datos de precipitación *SED*. Se presentan en primer lugar los resultados del análisis continuo.

De acuerdo con la definición de la función *wavelet*, el parámetro de escala, a , puede identificarse como fluctuación en la escala. Un valor pequeño de a representa una escala corta o una variación alta en la frecuencia. Por otro lado, el parámetro de localización, b , corresponde a los puntos temporales de las series a tratar.

Con el fin de detectar variaciones climáticas a diferentes escalas, los cálculos sobre las series temporales de precipitación normalizadas han sido realizados para diferentes valores del parámetro a comprendidos entre 1 y 256, para valores de $b = 1, 2, 3, \dots, N$, donde $N = 1092$ e igual a la longitud de las series temporales.

Los coeficientes *wavelet* $\psi(a,b)$ representan variaciones en la precipitación para varias escalas de tiempo y para cada dato de la serie temporal (meses). Un coeficiente *wavelet* positivo indica períodos secos y un coeficiente negativo indica períodos húmedos o lluviosos. Aparecen estructuras dipolares en los patrones de $\psi(a,b)$ que muestran cambios abruptos de anomalías negativas (positivas) a anomalías positivas (negativas) en los valores de precipitación.

Para estudiar la variabilidad temporal, se realiza una *MRA* mediante una transformada *wavelet symmlet* al conjunto de datos de la Península Ibérica. Por brevedad en la exposición, solo se presentan los resultados obtenidos para los observatorios de Madrid y Murcia que se consideran representativos de las regiones Atlántica y Mediterránea, respectivamente. La Figura 1 muestra la serie de anomalías de precipitación estandarizadas para el observatorio de Madrid y su correspondiente análisis *wavelet* para escalas temporales largas y cortas, variando el parámetro de localización, b . Se observan variaciones significativas para escalas de tiempo largas, $120 < a < 240$, mostradas por los centros más oscuros de la Figura 1. La escala temporal o el período de variabilidad

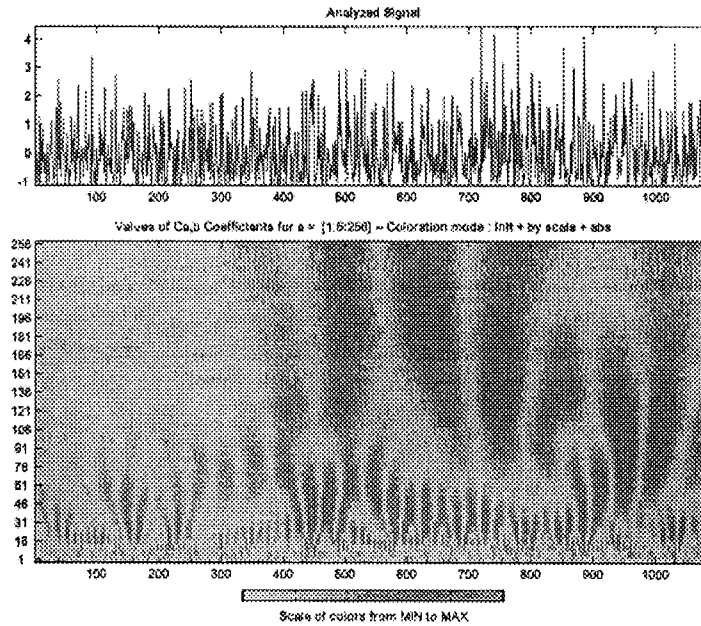


Figura 1: *Wavelet* transformada del observatorio de Madrid: (arriba) serie temporal estandarizada; (abajo) analisis *wavelet* continuo.

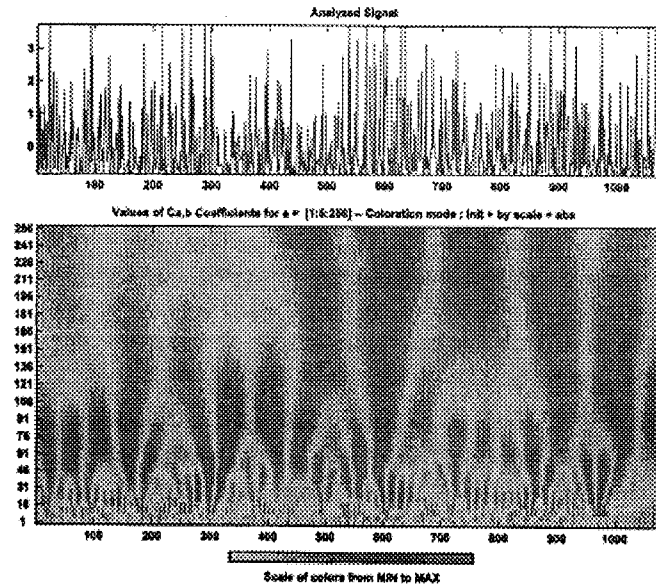


Figura 2: *Wavelet* transformada del observatorio de Murcia: (arriba) serie temporal estandarizada; (abajo) analisis *wavelet* continuo.

pueden considerarse para valores de b entre 450 y 800 lo que equivale a los años 1936 y 1965, respectivamente. Se observan los centros localizados en valores de $a = 240$ (20 años) para valores de b alrededor de 500 (1940), 625 (1951) y 750 (1961).

Para escalas temporales de 10 años, correspondientes a valores de $a = 121$, aparecen centros significativos situados en $b = 410, 500, 750, 960$, y 1000 es decir en los años 1933, 1940, 1961, 1979, y 1982, aproximadamente. La intensidad de las variaciones es mucho mayor alrededor de 1979 y 1982 que en el resto de los centros. Una de las ventajas de la transformación *wavelet* frente a la transformada de Fourier es que con el análisis *wavelet* no se pierde la información temporal.

Aparecen cambios abruptos a escalas cortas de tiempo, alrededor de 450 y 475 (1936 y 1938) para $a = 50$ (4 años) y en torno a 910 (1974) para $a = 60$ (5 años). Estos cambios se manifiestan por pares de centros dominantes que presentan importantes gradientes. Se puede observar que los efectos de borde en los extremos de las series se limitan a unos pocos años, debido a las cortas escalas involucradas.

Para la serie de Murcia, Figura 2, se pueden observar variaciones significativas para grandes escalas de tiempo, $160 < a < 250$, identificadas por grandes centros oscuros. La mayor escala se presenta para valores de b entre 460 a 790 esto es equivalente a 1937 y 1964, respectivamente. Esta característica se puede observar en la intensidad de los centros situados en $a = 220$ (18 años) alrededor de valores de b de 475 (1938), 600 (1949) y 760 (1962). La intensidad de las variaciones es

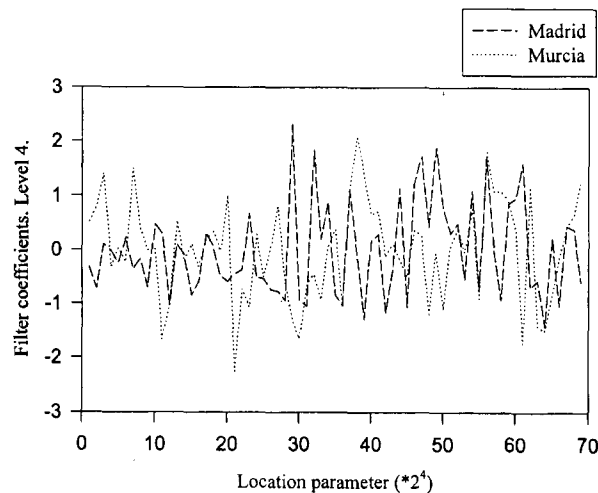


Figura 3: *Wavelet* transformada discreta de los observatorios de Madrid y Murcia

más fuerte alrededor de 1949 y 1962 que la correspondiente a 1938. Para escalas temporales de $a = 150$ (12 años), hay dos importantes centros significativos situados en 900 y 1000 para valores de b correspondientes a 1974 y 1982, aproximadamente. En escalas temporales menores, se tienen cambios abruptos en la línea de $a = 90$ (7 años, aproximadamente) entorno a $b = 110, 150, 340, 400$ y 1070, correspondientes a 1908, 1911, 1927, 1932 y 1988.

Los resultados más significativos del análisis discreto se muestran en la Figura 3, que representa los resultados del *MRA* para las series temporales seleccionadas. Se calcula el valor de los coeficientes de la aproximación *wavelet* de las series para la señal discreta. Mediante este análisis se obtienen coeficientes y “detalles”. Únicamente se representa el valor de los coeficientes para ambos observatorios. El número de coeficientes es $N/2^j$ donde j indica el nivel de multirresolución. En este estudio, el nivel seleccionado es $j = 4$ que corresponde a las oscilaciones de menor frecuencia.

En la Figura 3, aparecen cambios en la intensidad de los coeficientes. Se observa una variación más abrupta después del dato 30 (correspondiente a 1939) para Madrid que la que aparece para la serie de Murcia. Esta característica también se observa en los resultados para el análisis continuo. Si se comparan los resultados de ambos análisis, discreto y continuo, para bajas frecuencias, se observa que los coeficientes *wavelet* discretos (Figura 3) muestran una evolución de acuerdo con los diferentes centros del análisis continuo (Figuras 1-2). Por ejemplo, para $b = 750$ correspondiente a 1961, en el análisis continuo aparecen fuertes centros (con $10 < a < 20$ años) representados en la Figura 3 por un valor del parámetro de localización $b = 46$.

4. CONCLUSIONES

La transformación *wavelet* ha sido aplicada al análisis de las características de la precipitación en la Península Ibérica. La transformación *wavelet* muestra estructuras en diferentes escalas temporales y para diferentes elementos de una serie temporal mientras que la transformada de Fourier tradicional solamente informa acerca de la frecuencia perdiendo la información temporal. El análisis *wavelet* es un nuevo camino para representar funciones unidimensionales en dos dimensiones (tiempo y frecuencia). En este estudio se aplica un análisis *wavelet* continuo y discreto a una base de datos de precipitación. En ambos tratamientos se ha utilizado la familia *Symmetlet*, familia de *wavelets* de soporte compacto y cuasi-simétricas.

Debido a las diferencias en los resultados en varios observatorios de la Península Ibérica, se han considerado dos regiones a analizar, el área Atlántica y el área Mediterránea. Los resultados muestran las variaciones a diferentes escalas (o frecuencias) para elementos particulares de la serie temporal. En ambas regiones aparecen pares de centros significativos con fuertes gradientes.

En los resultados del análisis discreto se observa una evolución similar de los coeficientes *wavelet* a la obtenida mediante el análisis continuo. En próximos estudios se pretende investigar las variaciones de los coeficientes *wavelet* y su concordancia con la persistencia de episodios secos y lluviosos durante este período.

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado parcialmente mediante financiación del proyecto REN2000-0786/CLI.

6. REFERENCIAS

- CAMBANIS, S. y E. MASRY (1994): "Wavelet approximation of deterministic and random signals: convergence properties and rates". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 40, 1013-1029.
- CAMBANIS, S. y C. HOUDRÉ (1995): "On the continuous wavelet transform of second order random processes". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 41, 628-642.
- GAMAGE, N y BLUMEN, W.(1993): "Comparative analysis of low-level cold fronts: wavelet, Fourier, and empirical orthogonal function decompositions", *Mon. Wea. Rev.*, 121, 2867-2878.
- GONZÁLEZ-ROUCO, J.F., J.L. JIMENEZ, V. QUESADA y F. VALERO (2001): "Quality control of monthly precipitation data in the Southwest of Europe". *J. Climate*, 14, 964-978.
- GROSSMAN, A. y MORLET, J. (1984): "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape", *SIAM J. Math. Anal.*, 15, 732-736.
- GUPTA, V. y E. WAYMIRE (1990): "Multiscaling properties of spatial rainfall and river flow distributions.", *J. Geophys. Res.*, 95, D3, 1999-2009.
- HOUDRÉ, C. (1993): "Wavelets, probability and statistics: some bridges". Ed.: M. W. Fraizer. En "Mathematics and applications", 361-394.
- KUMAR, P. y FOUFOULA-GEORGIU, E. (1993): "A new look at rainfall fluctuations and scaling properties of spatial rainfall using orthogonal wavelets", *J. Appl. Meteorol.*, 32, 209-222.
- LOVEJOY, S. y D.SCHERTZER, (1990): "Multifractals, universality classes and satellite and radar measurements of cloud and rain fields". *J. Geophys. Res.*, 95, D3, 2021-2034.
- MAHRT, L.(1991): "Eddy asymmetry in the sheared heated boundary layer", *J. Atmos. Sci.*, 48, 472-492.
- MALLAT, S. (1989): "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ ". *Trans. Amer. Math.Soc.*, 315, 1, 69-87.
- MEYER, Y., (1988): "Ondelletes et Operateurs". Hermann.
- MORLET, G. A., FOURGEAU, I. y GIARD, D.,(1982): "Wave propagation and sampling theory. *Geophysics*, 47, 203-236.
- WAYMIRE, E., (1985): "Scaling limits and self-similarity in precipitation fields". *Water Resour. Res.*, 21, 8, 1271-1281.