

## MODELOS ESTADÍSTICOS PARA EL ANÁLISIS DE LAS ANOMALÍAS PLUVIOMÉTRICAS EN LA CIUDAD DE BARCELONA

Xavier LANA\*, August BURGUEÑO\*\*, Carina SERRA\* y Gonçal FERNANDEZ\*

\*Dept. Física i Enginyeria Nuclear (ETSEIB). Univ. Politècnica de Catalunya

\*\*Dept. Astronomia i Meteorologia. Facultat de Física, Univ. Barcelona

### RESUMEN

Las anomalías mensuales de precipitación en la ciudad de Barcelona se han analizado, desde un punto de vista estadístico, mediante la distribución Gamma y el modelo de Poisson, pudiéndose evaluar las probabilidades relacionadas con la repetición de largos episodios de déficit o exceso de precipitación y sus periodos de retorno. Los datos utilizados consisten en totales mensuales de precipitación registrados sin interrupción a lo largo de 128 años.

**Palabras clave:** Anomalías pluviométricas mensuales, distribuciones de Gamma y de Poisson, episodios de sequía.

### ABSTRACT

Rainfall anomaly patterns for the city of Barcelona are analysed from a statistical point of view. The database for the study consists of monthly amounts recorded along 128 years without interruption. Two hypothesis and the Gamma distribution lead to quantify, by means of a Poisson model, probabilities concerning repeated long episodes with rainfall shortage or excess, and their return periods.

**Key words:** Monthly pluviometric anomalies, Gamma and Poisson distribution, drought episodes.

### 1. INTRODUCCIÓN

Algunos aspectos relacionados con el fenómeno de la precipitación en Cataluña se han estudiado con detalle a lo largo de la última década. Pueden mencionarse, entre otros muchos, estudios de intensidad de precipitación y sus efectos en las telecomunicaciones con microondas (BURGUEÑO y VILAR, 1995) o en el diseño de los sistemas de drenaje urbano (LORENTE y REDAÑO, 1990; BURGUEÑO *et al.*, 1994). Asimismo, se han analizado las condiciones meteorológicas particulares que favorecen las inundaciones (LLASAT y PUIGSERVER, 1994), las características de los episodios extremos de precipitación diaria (LANA *et al.*, 1995) y los tipos de tiempo sinópticos que acompañan a los fenómenos de precipitación en general (SERRA *et al.*, 1998). Buena parte de los estudios precedentes se han centrado en episodios de grandes precipitaciones, posiblemente debi-

do a sus efectos sobre la vida de las personas y sobre las estructuras y los sistemas de comunicación. Por lo que respecta a los periodos de fuertes déficits de precipitación, no se han estudiado con tanto detalle, a pesar de sus implicaciones en la planificación de los recursos hídricos. Deben citarse, no obstante, los trabajos, entre otros, de MARTIN VIDE (1985) y LANA y BURGUEÑO (1998a, 1998b, 1998c), donde ciertos aspectos de lo que podríamos denominar comportamiento seco se estudiaron analizando bases de datos pluviométricos diarios mediante la distribución de Gumbel y mediante cadenas de Markov.

El objetivo del presente trabajo es realizar un estudio a escala mensual, siendo más fácil de este modo modelar fenómenos de sequía. Se utilizan al mismo tiempo hipótesis que nos conducirán a un modelo de Poisson, donde un proceso de sequía podría modelarse, por ejemplo, mediante episodios con déficit de precipitación separados por otros con exceso de precipitación. Para establecer qué se entiende por exceso o defecto de precipitación necesitaremos definir valores umbrales mensuales que nos marcarán la frontera entre estos dos conceptos. Aunque dicha definición pudiera parecer un inconveniente, en realidad nos proporciona una gran riqueza de resultados, debido a que el proceso que se propone lo podemos aplicar para distintos valores umbrales, definiendo por ejemplo situaciones de sequía moderada, grave o muy grave.

## 2. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Siguiendo el modelo propuesto por LANA y BURGUEÑO (1998c), adaptado para totales mensuales, se intentan cuantificar las probabilidades y periodos de retorno referidos a episodios generados por anomalías negativas (déficit de precipitación), que en su conjunto podrían a su vez dar lugar a episodios de sequía. De manera similar, podremos estudiar el caso de las anomalías positivas (exceso de precipitación). Definiremos un episodio de anomalías negativas de duración  $x$  como el formado por la concatenación de  $x$  totales mensuales consecutivos por debajo de ciertos valores umbrales mensuales, seguido de un total mensual que exceda el correspondiente valor umbral mensual. Puede definirse análogamente un episodio de anomalías positivas. El proceso completo puede desglosarse en los siguientes puntos:

a) Se necesitan, en primer lugar, las funciones de distribución de los totales mensuales para cada mes del año. De acuerdo con LANA y BURGUEÑO (1999), puede considerarse para la ciudad de Barcelona un único modelo de distribución Gamma, pero con distintos parámetros para cada uno de los 12 meses del año. Una vez determinada la función de distribución específica para cada mes del año, podemos escoger un decil determinado, por ejemplo el correspondiente al 50% de la distribución, y determinar su total de precipitación para cada mes. Tomando estas 12 cantidades como el valor umbral a considerar para definir anomalías mensuales positivas y negativas, conseguiremos por un lado homogeneizar el análisis de dichas anomalías y por otro estudiar detalladamente el comportamiento de la precipitación, que abarcará desde episodios de sequía graves o muy graves, con anomalías negativas calculadas para umbrales asociados al 10, 20 o 30% de la distribución, hasta episodios con excesos de precipitación para umbrales asociados al 70, 80 o 90% de la distribución. En el presente trabajo nos centraremos especialmente en analizar episodios con anomalías positivas y negativas para el decil asociado al 50% de la distribución, considerándose también otros deciles.

b) Una vez escogido un decil, determinados los 12 valores umbrales y calculada la serie mensual de anomalías positivas y negativas, ya podemos definir episodios “húmedos” (concatenación de anomalías positivas) y “secos” (concatenación de anomalías negativas) y clasificarlos en función de su duración evaluada en meses. A partir de este punto podemos utilizar ciertas similitudes con la bien conocida ley sísmica de Gutenberg-Richter. Supongamos que  $Z(x)$  es el número de episodios “secos” o “húmedos” de duración mayor o igual que  $x$ :

$$Z(x) = \alpha \exp[\beta(x-1)] \quad (1)$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  dos parámetros a determinar mediante las técnicas usuales de regresión lineal al tomar logaritmos en la ecuación (1). Cuestiones elementales de estadística nos llevan a definir la probabilidad de encontrarnos con un episodio que iguale o exceda la duración  $x$  como:

$$P(x) = P(X \geq x) = \exp[\beta(x-1)] \quad (2)$$

Otra cuestión interesante es la relación lineal:

$$m(x) = a + bx \quad (3)$$

existente entre la precipitación promedio  $m(x)$  recogida en un episodio y su duración  $x$  en meses. Técnicas usuales de regresión lineal permiten determinar de nuevo fácilmente los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  de la ecuación anterior.

c) Finalmente, el aspecto más interesante es el conjunto de hipótesis que nos permiten llegar a una formulación, en términos de la distribución de Poisson, que nos conducirá a cuantificar probabilidades relacionadas con la repetición de ciertos episodios “secos” o “húmedos” un número determinado de veces a lo largo de un cierto intervalo de años.

El proceso que se expone aquí es en realidad una adaptación a escala mensual de la formulación propuesta por LANA y BURGUEÑO (1999), que realizaron un estudio con base de precipitación diaria. Un primer paso elemental consiste en considerar la distribución binomial:

$$P_v = \binom{n}{v} P(x)^v [1 - P(x)]^{n-v} \quad (4)$$

siendo  $P_v$  la probabilidad asociada con la presencia de  $v$  episodios “secos” o “húmedos”,  $n$  el número total de episodios a lo largo de la etapa de registro considerada y  $P(x)$  la probabilidad cuantificada por la ecuación (2), haciéndose distinción entre episodios de anomalías negativas y de anomalías positivas. Consideremos en segundo lugar que  $P(x)$  alcanza valores cercanos a cero para episodios excediendo una cierta duración. Cabe esperar este comportamiento dado el decaimiento exponencial puesto de manifiesto en la expresión (2). Definamos, en tercer lugar,  $R$  como el número de veces que se producen episodios a lo largo de un año, sin hacer distinción en términos de duración. Supongamos, en cuarto lugar, que el producto  $P(x) \times R \times T$ , siendo  $T$  el intervalo de años para el que queremos realizar el estudio, tiende a un valor finito  $\lambda$  para una duración  $x$  convenientemente larga. Bajo todas estas condiciones, siguiendo textos clásicos como los de CRAMÉR (1956) o BENJAMIN y CORNELL (1970), y suponiendo que se cumple la independencia estocástica de las duraciones de los episodios, la distribución de Poisson:

$$P_x(n) = Prob(X \geq x; n) = \frac{\lambda^n \exp[-\lambda]}{n!} \quad (5)$$

cuantifica la probabilidad de detectar  $n$  episodios con duraciones mayores o iguales a  $x$  a lo largo de  $T$  años. Por otro lado, la definición usual de periodo de retorno nos conduce a:

$$T_r = \frac{1}{1 - \exp(-P(x) \cdot R)} \quad (6)$$

siendo  $T_r$  el tiempo esperado, en años, para detectar al menos un episodio de duración  $x$ . Por lo que respecta a la determinación de la mínima duración,  $x_s$ , a partir de la cual se cumplen las hipótesis que conducen al modelo de Poisson, se ha seguido el proceso propuesto por LANA y BURGUEÑO (1998c). Fijado un valor  $x_s$  arbitrario, se evalúa empíricamente la probabilidad de igualar o exceder  $x_s$  en un intervalo de tiempo  $T$ , y se compara con la probabilidad teórica  $1 - \exp[-P(x_s) \cdot R \cdot T]$  deducida a partir de la ecuación (5). Si ambas probabilidades son razonablemente parecidas, el valor escogido  $x_s$  se considera como el mínimo aceptable para aplicar el modelo de Poisson. En caso contrario, se aumenta el valor de  $x_s$  hasta conseguir la coincidencia de ambas probabilidades.

### 3. RESULTADOS

La base de datos utilizada en el presente estudio corresponde a la serie de registros mensuales de precipitación recogidos sin interrupción y a lo largo de 128 años en la ciudad de Barcelona. La Tabla I resume los valores umbrales obtenidos para los 12 meses del año y para los 9 deciles, representados por el correspondiente porcentaje  $R$  de la distribución acumulada, de acuerdo con las funciones de distribución Gamma obtenidas para Barcelona por LANA y BURGUEÑO (1999). La Tabla II resume los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para episodios “secos” y  $\alpha'$  y  $\beta'$  para episodios “húmedos”, considerando igualmente todos los posibles deciles.  $N, N', \rho$  y  $\rho'$  representan, respectivamente, el número de episodios y los coeficientes de correlación, cercanos a 1, para defectos y excesos de precipitación.

La Tabla III compendia los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para episodios “secos” y  $a'$  y  $b'$  para episodios “húmedos”. En ambas Tablas aparecen coeficientes de regresión lineal  $\rho$  y  $\rho'$  muy próximos a la unidad, siendo igualmente destacable que los parámetros  $\beta$  y  $b$  de las leyes empíricas (1) y (3) evolucionan linealmente con el decil considerado para episodios de anomalías negativas. Los parámetros  $\beta$  y  $b'$  de las leyes empíricas (1) y (3) siguen una evolución más complicada para episodios formados por anomalías positivas, especialmente en el caso de  $b'$  que presenta una evolución errática en términos del decil considerado. Estos resultados se resumen en la Tabla IV, donde se muestran los coeficientes  $a_i$  de la ley polinómica, donde  $R$  representa, en porcentaje, los deciles considerados y  $x$  designa, genéricamente, las pendientes de las leyes empíricas (1) y (3). Los coeficientes de regresión múltiple se representan mediante  $\rho$ .

$$\xi = \sum_{i=0}^n a_i R^i$$

R(%)	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
10	3,4	4,2	13,2	13,3	9,1	6,4	1,7	6,1	19,5	14,9	7,9	5,5
20	7,3	8,7	20,1	20,4	15,7	11,5	4,3	11,5	30,4	26,1	14,7	10,9
30	11,9	13,7	26,4	26,9	22,3	16,6	7,6	17,2	40,7	37,5	21,7	16,9
40	17,2	19,5	32,9	33,6	29,3	22,2	11,7	23,4	51,2	49,6	29,4	23,6
50	23,5	26,2	39,8	40,8	37,1	28,4	16,8	30,5	62,6	63,2	38,3	31,4
60	31,3	34,4	47,6	49,0	46,2	35,8	23,3	39,0	75,6	79,2	48,7	40,8
70	41,3	45,0	57,1	58,9	57,5	45,0	32,0	49,7	91,4	99,1	61,9	52,8
80	55,5	59,8	69,7	72,0	72,9	57,6	44,6	64,5	112,4	126,2	80,0	69,5
90	79,9	85,0	89,9	93,2	98,3	78,4	66,7	89,3	146,4	171,0	110,3	97,9

Tabla I. Valores mensuales de precipitación (mm) para las 9 probabilidades acumulativas asociadas con los deciles.

R(%)	N	$\alpha$	$\beta$	$\rho$	N'	$\alpha'$	$\beta'$	$\rho'$
90	131	5,02	-0,10	-0,989	131	7,02	-2,09	-0,999
80	241	5,71	-0,23	-0,998	240	6,77	-1,39	-0,996
70	312	6,09	-0,35	-0,997	311	6,53	-0,99	-0,987
60	367	6,62	-0,58	-0,998	366	6,49	-0,77	-0,991
50	390	6,47	-0,66	-0,998	390	6,31	-0,59	-0,994
40	367	6,93	-1,00	-0,997	367	6,11	-0,43	-0,993
30	318	6,88	-1,20	-0,995	318	6,22	-0,37	-0,997
20	248	7,54	-1,80	-0,989	248	5,95	-0,26	-0,995
10	159	6,72	-1,73	-0,997	159	5,61	-0,17	-0,987

Tabla II. Resultados de la regresión lineal, utilizando la ecuación (1), para episodios con déficit y exceso de precipitación.

R(%)	N	a	b	$\rho$	N'	a'	b'	$\rho'$
90	131	-3,98	38,20	0,989	131	43,88	107,40	0,985
80	241	-5,68	33,51	0,988	240	56,20	73,61	0,982
70	312	-8,21	29,01	0,962	311	46,26	68,04	0,974
60	367	-2,87	23,06	0,982	366	-9,16	84,93	0,989
50	390	1,50	17,53	0,996	390	16,10	67,16	0,995
40	367	0,60	14,57	0,994	367	-15,26	74,09	0,975
30	318	-0,88	11,72	0,993	318	18,97	57,65	0,990
20	248	3,39	5,52	0,909	248	16,95	54,63	0,960
10	159	-0,74	4,29	0,985	159	3,33	52,55	0,992

Tabla III. Resultados de la regresión lineal, utilizando la ecuación (3), para episodios con déficit y exceso de precipitación.

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\rho$
$\beta$	-1,963E-00	2,225E-02	-----	-----	0,950
$\beta'$	7,587E-02	-2,848E-02	6.476E-04	-6.608E-06	0,997
$b$	-2,872E-00	4,628E-01	-----	-----	0,970
$b'$	5,189E+01	1,624E-01	3,509E-03	-----	0,690

Tabla IV. Ajuste polinómico para la evolución de los coeficientes  $\beta$ ,  $\beta'$  y  $b'$  con los deciles.

Por lo que respecta a la hipótesis de trabajo de Poisson y a los periodos de retorno, la Figura 1 muestra un ejemplo de curvas de probabilidad para episodios de anomalías negativas con duraciones igualando o superando los 6 meses, y tomando como precipitación umbral la correspondiente al 50% de la distribución Gamma. Se contempla igualmente la posibilidad de que dichos episodios se lleguen a repetir un máximo de 5 veces a lo largo de 30 años. Las curvas de periodos de retorno mostradas en la Figura 2 corresponden a episodios de anomalías negativas, para los que se ha tenido en cuenta valores umbrales correspondientes a deciles asociados con el 30, 40 y 50% de la distribución. Debe destacarse que el valor inicial  $x_s$  es distinto para cada decil considerado.

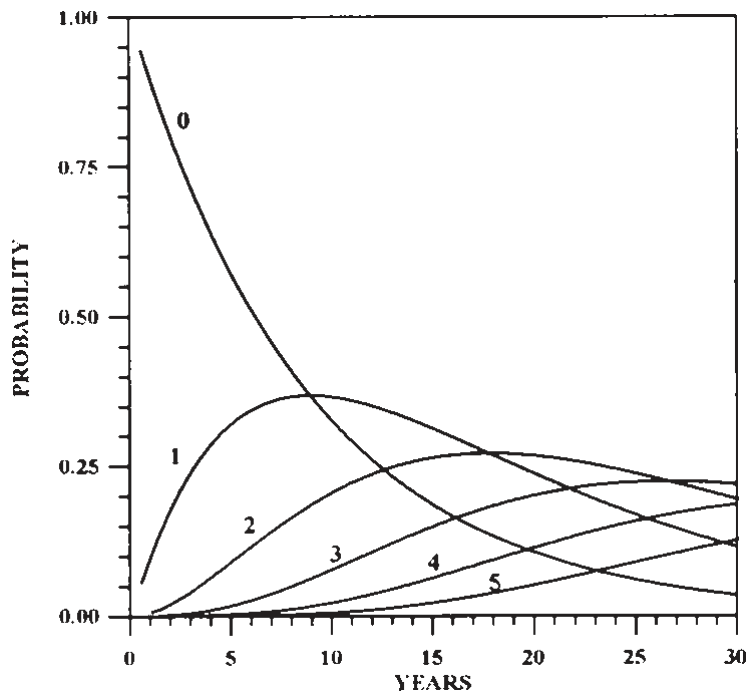


Figura 1. Probabilidades según el modelo de Poisson para episodios de anomalías negativas.

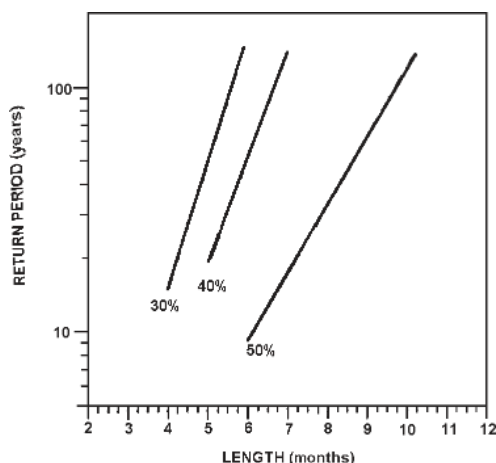


Figura 2. Periodos de retorno según el modelo de Poisson para episodios de anomalías negativas.

#### 4. CONCLUSIONES

Las leyes que proporcionan tanto el número de episodios de una duración mayor o igual a un valor prefijado, como la cantidad de precipitación promedio recogida en un episodio de una cierta duración, reproducen con gran exactitud los datos empíricos deducidos del análisis de las anomalías pluviométricas a lo largo de los 128 años de registro. Debe destacarse que dicha exactitud se conserva tanto para episodios de anomalías positivas como negativas y, lo que es más importante, para cualquiera de los deciles considerados. Se puede llegar a conseguir de esta manera información útil sobre el comportamiento anómalo de la precipitación, distinguiendo por ejemplo entre episodios graves de sequía (deciles del 20-30%) y otros episodios no tan preocupantes (deciles del 40-50%). Las leyes mencionadas, pero aplicadas a episodios de anomalías positivas, pueden ser al mismo tiempo herramientas útiles para llegar a conocer de qué manera y en cuanto tiempo pueden los episodios de anomalías positivas compensar los episodios de déficit pluviométrico importante.

Por lo que respecta a la planificación de los recursos hídricos, especialmente a medio y largo plazo, las probabilidades obtenidas según el modelo de Poisson y el cálculo de los periodos de retorno para episodios de anomalías positivas y negativas deberían ser un importantísimo punto de referencia. Pensemos que un proceso de sequía podría ser modelado como la repetición de episodios de fuertes anomalías negativas con breves episodios intercalados de anomalías positivas. Este factor de repetición, que se tendría en cuenta con alguna dificultad si utilizásemos modelos como los de la distribución de valores extremos de Gumbel por ejemplo, lo asume sin ningún problema el modelo de Poisson propuesto. Debe mencionarse, no obstante, un inconveniente. Las probabilidades y periodos de retorno serán únicamente válidos a partir de cierta duración mínima  $x_s$  del episodio, la cual deberá ser determinada empíricamente en cada caso. A su vez, no se podrán realizar previsiones, lógicamente, para intervalos de tiempo inferiores a  $x_s$ .

Por lo que respecta a aspectos concretos del régimen de anomalías que puedan afectar a la ciudad de Barcelona, se presentan aquí únicamente los resultados básicos que deberán ser analizados con más detalle en un futuro inmediato, que se podrían complementar con estudios de posibles periodicidades de las anomalías pluviométricas mediante el cálculo de espectros de potencia.

**BIBLIOGRAFÍA**

- BENJAMIN, J.R. and CORNELL, C.A. (1970). *Probability, statistics and decision for civil engineers*. McGraw-Hill, Inc., New York, 685 pp.
- BURGUEÑO A., CODINA B., REDAÑO A. and LORENTE J. (1994): "Basic Statistical Characteristics of hourly rainfall amounts in Barcelona (Spain)". *Theor. and Appl. Climatol.*, **49**, 175-181.
- BURGUEÑO A. and VILAR E. (1995): "Statistical Properties of 49 years of rainfall rate events". *Theor. Appl. Climatol.*, **50**, 213-225.
- CRAMÉR, H. *The elements of probability theory and some of its applications*. John Wiley & Sons, 1956, New York, 321 pp.
- LANA X., FERNÁNDEZ-MILLS G. and BURGUEÑO, A. (1995): "Daily precipitation maxima in Catalonia (North-East Spain): Expected values and their spatial distribution. *Int. J. Climatol.*, **15**, 341-354.
- LANA X. and BURGUEÑO A. (1998a): "Spatial and temporal characterization of annual extreme droughts in Catalonia (Northeast Spain)", *Int. J. Climatol.*, **18**, 93-110.
- LANA X. and BURGUEÑO A. (1998b): "Daily dry-wet behaviour in Catalonia (NE Spain) from the viewpoint of Markov chains", *Int. J. Climatol.*, **18**, 793-815.
- LANA X. and BURGUEÑO A. (1998c): "Probabilities of repeated long dry episodes based on the Poisson distribution. An example for Catalonia (NE Spain)". *Theor. Appl. Climatol.*, **60**, 111-120.
- LANA X. and BURGUEÑO A. (1999): "Evidences of monthly and annual pluviometric irregularity for the Spanish Mediterranean coast". *Theor. Appl. Climatol.*, (submitted).
- LLASAT M.C. and PUIGCERVER M. (1994): "Meteorological factors associated with floods in the North-Eastern part of the Iberian peninsula", *Natural Hazards*, **9**, 81-93.
- LORENTE J. and REDAÑO A. (1990): "Rainfall rate distribution in a local scale: The case of Barcelona city", *Theor. Appl. Climatol.*, **41**, 23-32.
- MARTÍN VIDE J. (1985): "Notas sobre variaciones de la distribución de las secuencias lluviosas y secas en el año medio en Barcelona (periodo 1911-70)", *Estudios Geográficos*, **181**, 473-483.
- SERRA C., FERNÁNDEZ MILLS G., PERIAGO M.C. and LANA X. (1998): "Surface synoptic circulation and daily precipitation in Catalonia". *Theor. Appl. Climatol.*, **59**, 29-49.



