

n. 3476-9

Sig: JWH
A9

MINISTERIO DE DEFENSA NACIONAL
SUBSECRETARÍA DE AVIACIÓN

SERVICIO METEOROLÓGICO ESPAÑOL

Serie A, núm. 9

Turbulencia atmosférica y evaporación

POR EL

METEORÓLOGO DR. JOSÉ DOMINGO QUÍLEZ

Profesor Agregado a la Facultad de Ciencias de Barcelona

BARCELONA

C. O. «Avant», Cortes Catalanas, 719

1938

TURBULENCIA ATMOSFÉRICA
Y EVAPORACIÓN

POR

JOSÉ DOMINGO QUÍLEZ

Résumé:

Les formules classiques pareilles à celles de Dalton et de Stefan ne peuvent pas en général être utilisées pour calculer la masse d'eau évaporée dans une atmosphère libre. Elles exigent dans son emploi l'introduction de termes correctifs concernant les conditions locales du vent, termes qui doivent être deduits empiriquement.

Ces inconvenients n'existent pas pour la formule de Cummings et Richardson basée sur des considerations énergétiques. Par contre le caractère des magnitudes qui figurent dans cette formule ne permet pas son emploi pratique dans l'état actuel de la technique.

L'auteur montre que l'analyse des conditions réelles ambiantes dans lesquelles la diffusion de la vapeur d'eau à lieu dans la basse atmosphère, conditions provenant des mouvements tourbillonnants de l'air près du sol, permet d'établir la formule suivante :

$$M = \frac{0,00039}{|\log \delta - \log \delta'|} \left[\frac{p'}{T'} - \frac{p}{T} \right]$$

M étant la masse en gr. d'eau évaporée par jour et par cm.^2 de surface ; T' et T les températures absolues moyennes journalières de la surface de l'eau et de l'air à une hauteur h ; p' la pression de vapeur saturée à la température T' ; p la pression moyenne journalière, exprimée comme p' en mm. de Hg, de la vapeur d'eau à l'hauteur h . Finalement δ et δ' sont les oscillations extrêmes pendant le jour, des températures potentielles sur la surface libre de l'eau et dans l'air à l'hauteur h .

Cette formule ne montre pas les difficultés signalées plus haut et elle exige seulement dans son emploi la mesure de températures et de pressions.

Introducción

La teoría cinética de los flúidos nos permite lograr fácilmente una idea clara acerca del mecanismo de la evaporación. En el movimiento desordenado de las moléculas del líquido llegan algunas a la superficie libre con una dirección, formando con ella un ángulo bastante grande y con velocidad suficiente para vencer las fuerzas de cohesión con las otras moléculas y salen del líquido penetrando en la masa gaseosa en contacto con la superficie libre.

Las moléculas evaporadas pueden chocar con las ya libertadas anteriormente o con las de distinta substancia integrantes de la atmósfera gaseosa que gravita sobre el líquido y tras estos choques volver parte de ellas a la superficie, donde de nuevo son captadas por las fuerzas de cohesión. Mientras el número de moléculas que abandonan el líquido se mantiene superior al de las que de nuevo son captadas por él, se verificará fenómeno de evaporación. Pero puede llegar un momento en que ambos números sean iguales, se habrá alcanzado entonces el denominado equilibrio estadístico en el que las masas de líquido y vapor se mantienen constantes, a pesar de subsistir entre ellas un intercambio permanente de moléculas.

La densidad del vapor y, por consiguiente, su tensión, alcanzan en este caso un valor límite que para un líquido determinado no puede ser sobrepasado a una temperatura dada, diciéndose entonces que el vapor es saturante o que la atmósfera gaseosa, en contacto con la superficie líquida, está saturada.

Como la energía cinética de las moléculas es tanto mayor cuanto más elevada sea la temperatura, el número de las que se escapan del líquido, en un tiempo dado, crecerá al aumentar aquélla, y como por consiguiente el número de las que penetran para mantener el equilibrio estadístico debe también crecer, la densidad, y por tanto la tensión del vapor saturante, será también tanto mayor cuanto mayor sea la temperatura, de acuerdo con la experiencia.

Finalmente, puesto que todas las moléculas líquidas no poseen la misma velocidad, las que mayor probabilidad tienen de abandonar el líquido serán las dotadas con las mayores velocidades, por lo que durante la evaporación deberá disminuir la energía cinética media de las moléculas líquidas y por ende la temperatura de la masa aun no evaporada, explicándose así también el enfriamiento que se observa en el líquido a causa de la evaporación.

Además, las moléculas que salen pierden gran parte de su velocidad ante el «freno» de las fuerzas de cohesión, explicando esta

disminución de velocidad el por qué la temperatura del vapor es la misma que la del líquido, y quedando así comprendidos con suma facilidad, como decíamos al principio, los fenómenos más conocidos del paso de líquido a vapor a la luz de la teoría cinética de los flúidos.

La fórmula de Clapeyron en el caso de la evaporación del agua

Dejando la teoría cinética de los cambios de estado, podemos también estudiar el caso particular de la evaporación del agua mediante las leyes de la Termodinámica clásica.

Consideremos una cierta masa de agua, parte de la cual se encuentra en el estado de vapor saturante y el resto subsiste líquida. De las tres variables presión p , volumen v y temperatura T , que termodinámicamente definen el estado de un sistema, la p no es en nuestro caso independiente, ya que, como hemos dicho, la tensión del vapor saturante depende de la temperatura, dependencia que podemos expresar mediante

$$(1)..... \quad p = f(T)$$

función cuya forma es diferente para cada líquido.

Tendremos, pues, como únicas variables independientes las v y T . Para toda variación elemental de ellas en dv y dT , el sistema líquido-vapor habrá de absorber una cierta cantidad de calor

$$(2)..... \quad dQ = a dT + b dv$$

siendo a y b dos coeficientes que pueden ser función de las variables y cuyo significado físico, que a nosotros no interesa, es bien conocido en cada caso.

Por otra parte, el primer principio de la Termodinámica nos da

$$(3)..... \quad dQ = dU + A p dv$$

ciendo dU la variación de energía interna experimentada por el sistema en la transformación elemental y A el equivalente térmico de la unidad de trabajo.

De las dos últimas ecuaciones se deduce la

$$(4)..... \quad dU = a dT + [b - A p] dv$$

y como en la transformación, reversible, dU ha de ser una diferencial exacta, se tendrá

$$(5)..... \quad \frac{\delta a}{\delta v} = \frac{\delta}{\delta T} (b - Ap) \quad \gg \quad A \frac{\delta p}{\delta T} = \frac{\delta b}{\delta T} - \frac{\delta a}{\delta v}$$

La variación de la entropía S del sistema habrá sido según (2)

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{a}{T} dT + \frac{b}{T} dv$$

que como también ha de ser una diferencial exacta

$$\frac{\delta \left(\frac{a}{T} \right)}{\delta v} = \frac{\delta \left(\frac{b}{T} \right)}{\delta T}$$

deduciéndose de aquí inmediatamente que

$$(6)..... \quad \frac{b}{T} = \frac{\delta b}{\delta T} - \frac{\delta a}{\delta v}$$

De las (5) y (6) obtenemos

$$(7)..... \quad b = AT \frac{\delta p}{\delta T}$$

Si nos fijamos ahora en una transformación del sistema consistente en el paso de líquido a vapor *sin alterar la temperatura* de una masa infinitamente pequeña de agua, entonces la (2) nos dará como calor absorbido para realizarla

$$dQ = b dv$$

y poniendo en ésta el valor de b dado por la (7), teniendo en cuenta que siendo p función solamente de T , la derivada parcial $\frac{\delta p}{\delta T}$ es

en nuestro caso una derivada total $\frac{dp}{dT}$, tenemos

$$(8)..... \quad dQ = AT \frac{dp}{dT} dv.$$

Si queremos hallar el calor total absorbido para la transformación a vapor, sin variar la temperatura, de todo un gramo de agua líquida, es decir, si queremos tener el calor latente de vaporización del agua l a la temperatura T , bastará integrar la anterior expresión para hallar

$$(9)..... \quad l = AT \frac{dp}{dt} (v' - v)$$

siendo v' y v los volúmenes específicos a tal temperatura del vapor y del agua líquida. Esta expresión, conocida con el nombre de fórmula de Clapeyron, es fundamental en todas las investigaciones teóricas de cambio de estado.

En ella figuran diversas funciones de la temperatura. Para el calor de vaporización l es bien conocida la fórmula dada por Regnault, como compendio de sus resultados experimentales

$$(10) \dots \quad l = 606,5 - 0,695 t$$

fórmula que ha sido sometida a repetidas críticas, limitándonos a decir que Willner llegó a la consecuencia de que l era función de segundo grado en t , dando la expresión

$$l = 589 - 0,3997 t - 0,001246 t^2$$

Ultimamente, A. W. Smith volvió a determinar experimentalmente valores de l , sirviéndose de un original método de medida (1) y obtuvo la fórmula

$$l = 597,44 - 0,580 t$$

en la que l , como en las anteriores, viene expresado en pequeñas calorías medias.

La otra función de la temperatura que forma parte de la fórmula (9) es la tensión p del vapor saturante y también ha sido determinada experimentalmente, siendo clásicas las determinaciones de Regnault y de Magnus realizadas casi simultáneamente para el vapor de agua en 1843.

Posteriormente se ha medido por numerosos físicos, y Henning hizo una crítica de todos los resultados, calculando los valores más probables de p y $\frac{dp}{dt}$ entre 0° y 200° .

También las fórmulas empíricas que se han propuesto para representar tales valores de p han sido muy numerosas. La más sencilla de todas es la de Bertrand (2)

$$\log p = 17,443 - \frac{2795}{T} - 3,868 \log T.$$

Recientemente Whipple (3) ha propuesto unas nuevas que se extienden a temperaturas inferiores a 0° c. Además de las empíricas se ha logrado también una teórica por Bradford (4) mediante la aplicación de la teoría cinética.

Como l y p , y por tanto $\frac{dp}{dT}$, vemos, que han sido muy estudiadas en el caso del agua, nos será fácil conocer los valores del

volumen específico de su vapor a diversas temperaturas, pues la fórmula (9) nos dará

$$v' = \frac{l}{AT} \frac{dp}{dT} + v.$$

A la temperatura 0° c., tenemos

$$T = 273 \quad l = 606.5 \quad \frac{dp}{dT} = 0,33$$

por tanto, recordando que el equivalente mecánico del calor $\frac{1}{A}$ es igual a $4,184 \times 10^7$ ergs y que para reducir las presiones de milímetros a unidades C. G. S., habremos de multiplicar por $\frac{1013250,144}{760}$ ya que la presión atmosférica que equivale en dinas a la representada por una columna de mercurio de 760 mm. de altura y 1 cm.² de sección, a 0° c. y gravedad normal, es la cantidad que figura en el numerador (5), tendremos para volumen específico del vapor de agua a 0° c.

$$v'_0 = \frac{4,184 \times 10^7 \times 606,5 \times 760}{273 \times 0,33 \times 1013250,144} + 1 = 211,274 \text{ cm.}^3$$

Para 30° c. se obtiene

$$v'_{30} = 183701 \text{ cm.}^3$$

Como el volumen específico v del agua líquida a esas temperaturas es prácticamente la unidad, vemos que en la fórmula (9) podemos desprestigiar v en presencia de v' en los estudios de evaporación del agua en la naturaleza, quedando así simplificada la fórmula de Clapeyron, que será para ellos

$$(11) \dots \quad l = AT v' \frac{dp}{dT}.$$

Todavía vamos nosotros a introducir otra simplificación que nos servirá para explicar alguna de las fórmulas empíricas más conocidas para el cálculo de la masa evaporada en un tiempo dado en superficies de agua expuestas al aire libre.

La fórmula (11) nos da, en efecto, llamando ρ_1 a la densidad del vapor de agua

$$(12)..... \rho_1 = \frac{1}{v'} = A \frac{T}{l} \frac{dp}{dT}$$

pero a la temperatura de cero grados

$$\frac{l}{T} = \frac{606,5}{273} = 2,22$$

y a la de 30°

$$\frac{l}{T} = \frac{585,7}{303} = 1,93$$

por lo que dentro de los límites de temperatura a que suele verificarse la evaporación del agua en la atmósfera, podremos tomar prácticamente a $\frac{l}{T}$ como constante, dándole el valor 2. La (12), es así

$$(13)..... \rho_1 = \frac{A}{2} \frac{dp}{dT}$$

Fórmulas empíricas de evaporación

La fórmula (13) nos da, pues, la densidad que a cada temperatura debe tener el vapor de la capa atmosférica en contacto con la superficie líquida, para que estando esa capa saturada quede, por tanto, establecido el equilibrio estadístico a que aludíamos en la Introducción y no varíe el valor de la masa líquida. Si la atmósfera es limitada, una vez lograda en toda ella la densidad correspondiente, se mantendrá la invariabilidad de la cantidad de líquido mientras permanezca invariable la temperatura, pero toda alteración de ésta traerá consigo la evaporación o condensación de la masa de agua suficiente para que el vapor tenga la densidad que según (13) corresponde a la nueva temperatura. En la existencia o no existencia del fenómeno de evaporación en atmósfera limitada no influirá, pues, más que la variación o constancia de la temperatura, pero en la atmósfera libre el vapor de agua se difunde, marchando desde la capa saturada en contacto inmediato con la superficie líquida a las capas superiores todavía no saturadas y aun manteniéndose constante la temperatura, el agua se estará evaporando tanto más rápidamente cuanto con mayor velocidad son por difusión transportadas las masas de su vapor desde la superficie a las capas superiores, a fin de que en el aire de la capa de contacto se mantenga continuamente la densidad del vapor que nos da (13) para esa temperatura.

En el aire encalmado, la rapidez de difusión y, según lo anterior, la de evaporación por tanto, se podría admitir en ausencia de un estudio a fondo del fenómeno de difusión, que era proporcional al gradiente vertical de la presión del vapor o, tomando una altura fija sobre la superficie del agua, a la diferencia entre las tensiones del vapor en la superficie y en la capa aérea situada a aquella altura o, todavía, al cociente de las mismas. Y esa diferencia o cociente es el factor principal o único que como variable figura en la generalidad de las fórmulas empíricas que se han propuesto para el cálculo de la masa evaporada en un tiempo dado.

De entre ellas, las que quizá han tenido más éxito han sido las dadas por Bigelow (6), quien en el análisis de las observaciones realizadas con tanques colocados en las cercanías del depósito natural llamado Mar de Salton, situado en la región de California, llegó a la fórmula siguiente para la masa de líquido M_0 evaporada en un tiempo dado por cm^2 y *sin viento*

$$(14)..... \quad M_0 = C \frac{p'}{p} \frac{dp}{dT}$$

donde p' es la tensión máxima del vapor a la temperatura de la superficie del agua y p a la del punto de rocío de la atmósfera a treinta o sesenta centímetros sobre la superficie. C es una constante que depende del área del tanque en que la evaporación se estudia.

Las otras fórmulas propuestas son de la misma forma que la anterior de Bigelow o bien idénticas, salvo en el valor de la constante, a la bien conocida de Dalton que, para el mismo caso de aire en calma, es $M_0 = C_1 (p' - p)$.

Naturalmente, estas fórmulas, en realidad, sólo serán aplicables en este último caso de aire encalmado y en una extensa superficie de agua para que podamos así desprestigiar el efecto perturbador de los bordes y considerar las superficies de igual tensión de vapor como horizontales; es decir, para que se pueda desprestigiar la difusión colateral.

En cuanto exista viento, el aire móvil arrastrará consigo las moléculas de vapor de la capa en contacto con la superficie libre de agua y este transporte de las moléculas por el viento, más rápido que el siempre lento, debido a la difusión en aire encalmado, acelerará la evaporación, siendo, por tanto, mayor o menor la masa de agua que atraviesa la unidad de superficie en un tiempo dado, según que sea mayor o menor la rapidez de aquel transporte, es decir, la velocidad del viento.

La estructura íntima de los movimientos de las capas aéreas próximas al suelo dificulta grandemente la introducción del término

correctivo, debido al viento en las fórmulas anteriores, cuando éstas quieren referirse a masas de agua evaporadas en pequeños intervalos de tiempo. Las ráfagas traducidas en las bandas de los anemómetros registradores en el conocido fenómeno de las pulsaciones, cambiando continua e irregularmente la velocidad y aun la dirección del viento, imposibilitan todo planteamiento matemático de una función de esa velocidad apta para ser introducida en las fórmulas empíricas.

No queda más recurso que el de aplicando tales fórmulas a la evaporación durante intervalos de tiempo de varias horas y aun de días, tomar un valor constante para esa velocidad: la velocidad media en metros por segundo o kilómetros por hora o por día y relacionar con esa velocidad media los valores de la masa de agua evaporada.

En todas las fórmulas conocidas por nosotros, se admite que el aumento producido por la acción del viento sobre la masa M_0 que se evapora con aire en calma durante un cierto tiempo, es directamente proporcional a la velocidad media del aire y a esa masa, suponiendo tal aumento igual a $C' M_0 v$ donde C' es una constante y v aquella velocidad. La fórmula general de Bigelow es así:

$$(15)..... \quad M = C \frac{p'}{p} \frac{dp}{dT} [1 + C'v].$$

Las constantes de esa fórmula, como las de todas las propuestas de tipo análogo, alguna de las cuales criticó el propio Bigelow (7), han de determinarse mediante medidas simultáneas de evaporación y de los valores medios de las otras variables meteorológicas. En sus estudios con tanques especiales, efectuados primero de los Estados Unidos y después en la Argentina (8), las fué modificando Bigelow, que finalmente dió como valores para hallar el espesor en mm. de la capa de agua evaporada en cuatro horas si v se expresa en km. hora.

$$C = 0,023 \left[2 - \frac{2}{\pi} \text{arc tg } (0,023 S) \right]$$

siendo S el área en metros cuadrados de la superficie evaporante y $C' = 0,084$.

Posteriormente se hizo una aplicación en Europa de la fórmula (15), por Knoche, quien ha dado a conocer (9) el buen resultado obtenido con ella utilizando los datos de evaporación de Potsdam durante 1927.

Sin embargo, las fórmulas de ese tipo no pueden, en general,

aplicarse a embalses de agua en la naturaleza ante la incertidumbre de asignar convenientes valores a sus constantes. Empíricamente no es posible determinarlas para el embalse, pues no se podrá, en general, hallar con exactitud medidas directas ni indirectas de la magnitud de su evaporación y los valores hallados con tanques especiales, aun colocándolos en las inmediaciones del embalse, no se pueden aceptar sin discusión para interpretar la evaporación de este último. Una comprobación patente de ello se deduce de los contradictorios resultados de Bigelow y del Prof. Carpenter ⁽¹⁰⁾ para el valor relativo de las masas evaporadas en idénticos tanques de evaporación cuando están enterrados, a fin de que la superficie evaporante se halle lo más cercana posible de las condiciones naturales, y cuando se los coloca flotando sobre el agua de lagos o pantanos.

Difusión del vapor de agua en el aire seco **Fórmula de evaporación de Stefan**

En las fórmulas anteriores hemos visto que se tiene en cuenta el efecto de la rapidez de difusión del vapor de agua en la atmósfera encalmada, suponiéndola dependiente exclusivamente del gradiente de la presión parcial del vapor de agua. Vamos a estudiar ahora con algún detalle aquella difusión para llegar a las leyes físicas que la rigen y tratar luego de aplicarlas, como lo hizo Stefan al fenómeno de la evaporación.

Consideremos un cilindro vertical de un centímetro cuadrado de sección recta. En este cilindro existen dos gases, aire seco y vapor de agua, que se propagan en la dirección de su eje y en sentidos contrarios, tendiendo a unificar la mezcla. Supongamos logrado el equilibrio aparente y sean P la presión total y T la temperatura absoluta, ambas ya uniformes en todo el cilindro. Si p_1 y p_2 son las presiones parciales del vapor de agua y del aire seco respectivamente, tendremos

$$(16)..... \quad P = p_1 + p_2 = \text{constante.}$$

Puesto que suponemos alcanzado el equilibrio aparente, la composición de la mezcla será uniforme en toda sección horizontal del cilindro y en un mismo tiempo deberán pasar, en los dos sentidos de la normal a esa sección, el mismo número de moléculas de ambos gases, y si llamamos ρ_1 , y ρ_2 a las densidades del vapor y del aire seco y u_1 y u_2 a las velocidades medias de las moléculas que atraviesan la sección, las cantidades de masa de vapor de

agua y de aire seco que pasan a través de la sección en la unidad de tiempo serían $\rho_1 u_1$ y $\rho_2 u_2$ y por tanto, según la hipótesis de Avogrado, los números de moléculas de cada gas que atraviesan la sección son proporcionales a $\frac{\rho_1 u_1}{d_1}$ y $\frac{\rho_2 u_2}{d_2}$, siendo d_1 y d_2 las densidades normales, o sea a presión $P_0=760$ mm. y temperatura $T_0=273$.

Como ambos números de moléculas son iguales, como hemos dicho, por estar ya logrado el equilibrio aparente de la mezcla gaseosa, se tendrá, pues, que

$$(17) \dots \frac{\rho_1 u_1}{d_1} + \frac{\rho_2 u_2}{d_2} = 0$$

ya que u_1 y u_2 son de signos opuestos.

Pero sabemos que

$$(18) \dots \rho_1 = d_1 \frac{T_0}{T} \frac{p_1}{P_0} \quad \rho_2 = d_2 \frac{T_0}{T} \frac{p_2}{P_0}$$

y por tanto la anterior ecuación se puede poner en la forma

$$(19) \dots p_1 u_1 + p_2 u_2 = 0.$$

La velocidad con que se verifica la propagación de un gas en el seno de otro puede considerarse como constante y, por consiguiente, equilibradas las fuerzas motriz y resistente. La motriz es proporcional al gradiente de la presión parcial del gas y la resistente la supondremos, con Stefan, proporcional a la velocidad relativa y al producto de las densidades de los dos gases. Tenemos, por tanto,

$$(20) \dots \frac{dp_1}{dn} = C \rho_1 \rho_2 (u_2 - u_1)$$

donde C es una constante que define la resistencia que opone el aire a la propagación del vapor de agua. Esta constante es positiva, ya que si p_1 crece con la distancia n sobre la normal, es necesario que u_1 sea negativa y u_2 positiva por tanto. La ecuación (20) se transforma mediante las (17) y (19) en

$$(21) \dots \frac{dp_1}{dn} = - C d_1 d_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \frac{P p_1}{P_0^2} u_1 = - \frac{1}{D} p_1 u_1$$

siendo

$$D = \frac{1}{C} \frac{P_0^2}{d_1 d_2} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \frac{1}{P}$$

el llamado *coeficiente de difusión* del vapor de agua en el aire, cuya determinación experimental ha sido realizada por diversos investigadores.

Stefan hizo una aplicación de este fenómeno de la difusión al de la evaporación, considerando un tubo cilíndrico de altura determinada y sección recta constante que contiene agua hasta un nivel situado a la distancia h del plano de su borde, estando en reposo la atmósfera en el interior del tubo y siendo, por tanto, en él $u_2 = 0$, con lo que la (20) da

$$(22) \dots \frac{d\phi_1}{dn} = - C \rho_1 \rho_2 u_1$$

Pero

$$M_0 = \rho_1 u_1$$

es la masa que se evapora por centímetro cuadrado y por segundo y si además introducimos en (22) el valor de ρ_2 dado por las (18), tendremos

$$\frac{d\phi_1}{dn} = - C d_2 \frac{T_0}{T} \frac{\phi_2}{P_0} M_0$$

y puesto que (16)

$$\phi_2 = P - \phi_1$$

quedará para valor de M_0 ya que P decíamos que era uniforme y por tanto independiente de n

$$M_0 = \frac{P_0}{C d_2} \frac{T}{T_0} \frac{d \log (P - \phi_1)}{dn}$$

Como la intensidad M_0 de difusión es independiente de n , la derivada de $\log (P - \phi_1)$ también lo será, bastando por tanto para calcularla tomar dos valores de la función logarítmica en dos secciones cualesquiera del espacio gaseoso del tubo y dividir su diferencia por la distancia entre esas dos secciones. Tomemos las que corresponden a la superficie evaporante y a la abertura del cilindro y llamemos en ellas p' y p a las respectivas tensiones del vapor. Tendremos

$$(23) \dots M_0 = \frac{P_0}{C d_2} \frac{T}{T_0} \frac{1}{h} \log \frac{P - p}{P - p'}$$

Desarrollando en serie de Maclaurin la función logarítmica del segundo miembro

$$\log \frac{P-p}{P-p'} = \log \left[1 + \frac{p'-p}{P-p'} \right] = \frac{p'-p}{P-p'} - \frac{1}{2} \left(\frac{p'-p}{P-p'} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{p'-p}{P-p'} \right)^3 - \dots$$

Las tensiones del vapor p' y p son pequeñas en comparación de la presión atmosférica P y podremos, por tanto, prescindir de todos los términos de la serie a partir del segundo, con lo que la (23) nos da

$$(24) \dots M_0 = \frac{P_0}{Cd_2} \frac{T_1}{T_0} \frac{1}{h} \frac{p' - p}{P - p'} = \frac{K}{h} T \frac{p' - p}{P - p'}$$

Esta masa M_0 ocupa a la temperatura T y presión P de la experiencia un volumen V dado por la expresión

$$V = \rho_1 u_1 = Vd_1 \frac{T_0}{T} \frac{P}{P_0}$$

La (24) puede, pues, teniendo en cuenta la ecuación anterior y el valor del coeficiente D de difusión, ponerse en la forma

$$(25) \dots V = \frac{D}{h} \frac{p' - p}{P - p'}$$

en la que V puede significar también la velocidad de evaporación. Esta fórmula (25) es precisamente la dada por Stefan, a que nos proponíamos llegar.

Aplicaciones de la fórmula de Stefan a la evaporación en la libre atmósfera

En la fórmula (25) o su equivalente la (24) se han basado numerosos estudios prácticos de evaporación en la atmósfera. Últimamente ha vuelto sobre ella Szymkiewicz, en sus estudios climatológicos (11), al tratar de caracterizar la humedad de un clima mediante un índice fácil de obtener.

En la fórmula (24), teniendo en cuenta que la magnitud h es independiente del clima y considerando a C como constante, llama Szymkiewicz «índice de evaporación» a

$$(26) \dots i = (p' - p) \frac{T}{273} \frac{760}{P - p'}$$

De los datos utilizados en el estudio citado se deduce una correlación muy estrecha entre el índice de evaporación media en las distintas horas del día y las temperaturas correspondientes. Las curvas diarias de temperatura e índice son casi paralelas, lo que naturalmente no significa sino que los otros factores del índice tienen una escasa variabilidad horaria. También se deduce que el valor medio para todo el día del índice de evaporación es muy próximo a la mitad del valor máximo del mismo, pudiendo, pues, considerarse este valor máximo como una cantidad proporcional al valor medio diario. Esto, unido a la escasa variabilidad que, salvo la temperatura, hemos dicho tienen los otros factores del índice, facilita grandemente las aplicaciones prácticas, pues en ellas bastará calcular el índice máximo diario tomando la temperatura máxima y los valores de P , p y p' en el momento en que tiene lugar esa máxima, si ello es posible por la existencia de aparatos registradores, y si se carece de ellos, podremos tomar los obtenidos en la observación cotidiana del mediodía, próxima, por tanto, a la hora de máxima temperatura diaria.

El interés principal de los estudios de Szymkiewicz estriba en la aplicación del índice de evaporación a la caracterización de la humedad del aire en una región determinada, para explicar, mediante aquel factor climático, ciertas distribuciones especiales sobre la Tierra de algunas especies vegetales ⁽¹²⁾. Pero si en tal aspecto climatológico-botánico puede ser útil la aplicación del índice de la fórmula (24), no podemos, en cambio, utilizar ésta con éxito para determinar la magnitud de la masa evaporada en la atmósfera libre, cosa que, como dijimos, se ha hecho, sin embargo, con frecuencia. Ella ha sido, en efecto, obtenida mediante el supuesto de aire en reposo, por lo que al querer aplicarla a las condiciones ordinarias de la atmósfera, tropezaremos con las mismas dificultades que ya mencionábamos al hablar de la fórmula de Bigelow. Será necesario, pues, introducir, lo mismo que en esta última, términos correctivos para tener en cuenta la acción del viento, con constantes empíricas dependientes de las condiciones del lugar de observación.

Entre los que la utilizaron modificándola en tal sentido, figura Shierbeck ⁽¹³⁾, quien teniendo en cuenta lo ya enunciado por Heen en 1891, de que la velocidad de evaporación es proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad del viento, hizo en ella

$$\frac{1}{h} = C_1 + C_2 v^{1/2}$$

siendo v la velocidad del viento y C_1 y C_2 dos constantes.

Esta proporcionalidad de la rapidez de la evaporación a la raíz cuadrada de la velocidad del viento, deducida mediante el empirismo, ha sido analizada matemáticamente, en un trabajo reciente, por Szweikowsky (14), demostrando que la proporcionalidad sólo es válida cuando la difusión colateral es despreciable en comparación con el desplazamiento del vapor de agua por el viento.

También Szymkiewicz, en un trabajo dedicado ya concretamente a la evaporación de un terreno recubierto de vegetación (15), da un coeficiente, por el que hay que multiplicar el índice i para obtener el espesor de la capa de agua evaporada, de la forma $C' + C'' v$, donde v es la velocidad del viento medida a una altura de 150 cm. sobre el terreno.

Tropezamos, pues, como acabamos de decir, con los inconvenientes ya señalados al ocuparnos de las fórmulas de tipo de la de Bigelow, cuando intentamos aplicar la de Stefan a medidas de evaporación de grandes embalses. Necesitamos poseer un medio directo de determinar la magnitud real de la masa evaporada, para con los datos obtenidos poder determinar las constantes locales de la fórmula, y precisamente en la carencia de dicho método estriba la utilidad práctica de las fórmulas.

Veremos que estudiando, mediante la moderna teoría turbilionaria de los movimientos del aire en las bajas capas atmosféricas, la difusión real del vapor de agua dentro de esas capas, se puede obtener una fórmula de evaporación en la que desaparecen los inconvenientes citados. Pero antes vamos a exponer sucintamente otro moderno método de enfocar el problema desarrollado por los americanos N. W. Cummings y Burt Richardson y basado en consideraciones energéticas.

Fórmula de Cummings

La magnitud de la evaporación puede ser evidentemente determinada mediante el conocimiento de la energía utilizada en el proceso del cambio de estado. Si I es la energía que, procedente de la radiación solar o celeste, penetra en el agua por cada centímetro cuadrado de su superficie, parte de esta energía es de nuevo radiada por esa superficie al espacio, siguiendo las leyes termodinámicas de la radiación; llamamos B a esa porción, con lo que $I - B$ será en definitiva la cantidad de energía absorbida por el agua a través de aquel centímetro cuadrado de superficie. De ella, una parte S se empleará en calentar el agua, haciéndole variar la temperatura; otra parte Q , será cedida al aire y conducida por él como calor sensible, otra parte C se perderá por con-

ducción a través de las paredes del vaso natural o artificial que contiene el agua, se empleará también en la dilatación del agua y podemos hacer que incluya en sí esa constante C , la diferencia de energía calorífica entre la aportada al depósito por las corrientes de agua que penetran y la restada por las que salen de él.

Tenemos, pues, que

$$I - B - S - Q_c - C$$

es la energía que en definitiva nos quedará, como parte de la absorbida por el agua, para ser transformada en calor latente de vaporización $Q_e = IM$. La evaporación M expresada en gramos por centímetro cuadrado de superficie evaporante vendrá dada así por la fórmula

$$(27) \dots \quad M = \frac{I - B - S - Q_c - C}{l}$$

Pero entre los dos calores Q_c y $Q_e = IM$ existe en este caso una relación obtenida por Bowen ⁽¹⁶⁾, fácilmente determinable. Esta relación la estableció Bowen mediante la fórmula siguiente, a la que llegó por consideraciones teóricas

$$R = \frac{Q_c}{Q_l} = 0,46 \frac{T - T'}{p - p'} \frac{P}{760}$$

donde T es la temperatura del aire, T' la de la superficie del agua, p la tensión del vapor en el aire, p' la que tendría si estuviese saturado a la temperatura de la superficie del agua y, finalmente, P es la presión atmosférica expresada en milímetros de mercurio.

Por tanto, poniendo en (27) en vez de Q_c su valor

$$Q_c = RIM$$

tendremos fácilmente

$$M = \frac{I - B - S - C}{(1 + R)l}$$

Esta fórmula de Cummings, a pesar de poder prescindir de C en las necesidades de ingeniería de la evaporación de los grandes embalses de lagos y pantanos, en las que tiene un valor correctivo muy pequeño y no obstante haber evitado la introducción del efecto del viento, tiene el inconveniente en la práctica del tedioso proceso

necesario para poder evaluar cada uno de los otros términos que figuran en el numerador. Por ello, fuera de las propias determinaciones de Cummings y Richardson realizadas en Pasadena y Fort Collins (Estados Unidos), no son conocidos otros intentos de utilizar su método en la práctica, por lo que nos limitaremos a lo dicho, que nos basta para completar la exposición y crítica contenida en todo lo anterior del estado del problema de la determinación del agua evaporada en la libre atmósfera durante un cierto tiempo.

Turbulencia atmosférica y evaporación

Introducción

Vimos que las fórmulas de evaporación, teniendo como base la de Clapeyron o la difusión del vapor de agua en el aire seco conforme a la teoría de Stefan, no pueden generalmente aplicarse a la atmósfera libre ante la imposibilidad matemática de tener en cuenta en ellas el efecto del viento, dada la especial estructura de los movimientos del aire en las capas próximas al suelo.

Al moverse el aire sobre la superficie terrestre se engendran en su masa numerosos torbellinos, análogamente a lo que sucede en una corriente de agua que se desliza sobre un lecho escabroso. El efecto inmediato de estos remolinos aéreos al pasar por un determinado punto, será el de producir cambios bruscos en la dirección y velocidad del viento que habrán de notarse en un anemómetro registrador, en cuyas bandas se observan, en efecto, rápidas «pulsaciones» en vez de las líneas continuas que los vientos constantes producirían en el anemograma. Llamando «viento turbulento» a la diferencia entre el viento medio y el instantáneo mostró Taylor ⁽¹⁷⁾ al discutir las observaciones efectuadas sobre los grandes bancos de hielo de Terranova, durante la expedición del *Escocia* en 1913, que las componentes de la velocidad de los vientos turbulentos, según tres direcciones perpendiculares, tienen el mismo valor medio o, dicho con análogas palabras a las de la teoría cinética de las moléculas, que hay equipartición de la energía cinética en los vientos turbulentos, según las tres direcciones.

Y al igual que no es posible aplicar el rigorismo matemático al movimiento de una molécula aislada, no lo es tampoco al de un solo torbellino, pero se podrá, en cambio, hacerlo al de un gran número de ellos, lo mismo que en la teoría cinética se hace con los movimientos medios de las moléculas. El aire, pues, movién-

dose sobre la superficie terrestre está «lleno» en todas las direcciones de remolinos de variada forma y diámetro análogamente a como lo está de moléculas que se mueven en todas las direcciones y tienen distintas velocidades, y la analogía entre la teoría del movimiento turbillonario de las bajas capas atmosféricas y la teoría molecular de un gas es tan grande que Shaw llega a decir ⁽¹⁸⁾ que ambos fenómenos pueden considerarse sujetos a las mismas leyes, pero, con una gran diferencia de escalas.

Con la teoría cinética la viscosidad, la conducción del calor y la difusión de los gases, son tres fenómenos cualitativamente iguales: *fenómenos de transporte* de la cantidad de movimiento, de la energía y de la masa respectivamente, ya que una molécula que se traslada transporta consigo una cierta cantidad de cada una de las tres magnitudes dichas.

Entre los coeficientes que definen el poder de transmisión de ellas se establecen relaciones que las ligan entre sí. Para la conductividad calorífica B y el coeficiente de viscosidad η de un gas dado, si c_v es el calor específico a volumen constante, se llega teóricamente ⁽¹⁹⁾ a

$$B = 1,395 \eta c_v$$

Los resultados de la observación han dado para el aire el 0° c.

$$\eta = 0,0001725 \quad \text{y} \quad B = 0,0000566$$

El coeficiente de difusión es más difícil de ligarlo con los otros en una misma ecuación cuando se trata de dos clases distintas de moléculas; en cambio en el caso del coeficiente de interdifusión se llega a la relación, si ρ es la densidad del gas,

$$D = 1,336 \frac{\eta}{\rho}$$

Para el caso de la difusión del vapor de agua en aire, Summerhays ⁽²⁰⁾, ha obtenido experimentalmente el valor $D=0,282$. a la temperatura de 16°, 1 c.

Como vemos, el coeficiente de difusión de las moléculas de vapor de agua en las de aire es más de mil veces mayor que los coeficientes de viscosidad y de conducción del calor.

Veremos inmediatamente que en la teoría de los movimientos del aire en la baja atmósfera, las tres magnitudes equivalentes a las anteriores, pueden ser cualidades que indistintamente es permi-

tido asignar a una misma cantidad ligada a la masa aérea que se desplaza turbulentamente, pero los tres coeficientes análogos que podremos establecer no presentan tamañas desigualdades como las señaladas para los de la teoría cinética, y aun cuando no haya razones teóricas decisivas para admitir la igualdad entre los tres, los resultados experimentales conducen para ellos a valores de un mismo orden de magnitud que han permitido se les haya podido suponer como iguales. Esta supuesta igualdad puede ser grandemente ventajosa si hay posibilidad de aplicar la teoría turbillonaria a la obtención de una fórmula de evaporación.

Ecuación fundamental de la turbulencia atmosférica

Cuando en Hidrodinámica o Aerodinámica se habla de movimientos de «porciones definidas» de fluido, no se tiene en cuenta que las moléculas, de acuerdo con la teoría cinética, están entrando y saliendo continuamente a través de la superficie limitante del «elemento definido».

Las derivadas que figuran en las fórmulas, son derivadas siguiendo un movimiento *medio* del elemento y aquella teoría cinética ha revelado precisamente que algunas propiedades como la conducción del calor, viscosidad y difusión que se atribuían a los flúidos en las ecuaciones físicas, son, en realidad, debidas a esos movimientos moleculares, imposibles de seguir en detalle.

También las ecuaciones que traducen los movimientos atmosféricos de las capas cercanas a tierra, representan movimientos *medios* por no poder considerar el detalle de los numerosos torbellinos existentes, por ejemplo, dentro de una gran superficie esférica de aire, cuyo centro diremos que es un punto desplazándose con «movimiento medio» si la cantidad total de movimiento de fluido encerrado en la esfera, considerado en conjunto, puede tomarse igual al producto de la masa de ese fluido por el vector velocidad del centro de la esfera.

Consideremos ahora, como hace Richardson ⁽²¹⁾, una magnitud G que se desplaza con la masa de aire, y supongamos que tal magnitud tiene la propiedad de que la *cantidad total* de ella contenida en una determinada porción de aire no se altera por el reajuste interno de esa porción o por la detención de la misma. Con esa propiedad, la *variación* total de G contenido en el aire limitado por la superficie esférica de que hablábamos, sólo será debida a la cantidad de G que fluye a través de la superficie limitante.

Para simplificar y teniendo en cuenta que dados los significados que veremos puede tener G (vapor de agua, temperatura potencial

cantidad de movimiento) las variaciones de ella son en la atmósfera mucho más rápidas en sentido vertical que en el horizontal, nos limitaremos al caso de la difusión vertical de G . Considerando, pues, en vez de la superficie esférica dicha, una extensa superficie horizontal, que intercepta un gran número de torbellinos y se mueve verticalmente en la atmósfera siguiendo el movimiento medio del aire, llamaremos *flujo turbillonario ascendente*, Φ , de la magnitud G al cociente de la cantidad G que atraviesa el total de la superficie, en la unidad de tiempo, por el área de la misma.

Si nos fijamos, por tanto, en una capa de aire de espesor dh limitada por dos extensos planos horizontales que se mueven con el movimiento medio, la variación de G por unidad de tiempo y por unidad de superficie de la capa será, según lo anterior,

$$- dh \frac{d\Phi}{dn}$$

siendo dn un elemento de longitud de la normal a la capa.

Si χ representa la cantidad de G por *unidad de masa* de atmósfera y ρ la densidad del aire, será $\rho\chi dh$ la cantidad total de G contenida en el elemento de capa considerado. Por tanto, si θ designa al tiempo

$$(28) \dots \frac{d(\rho\chi dh)}{d\theta} = - dh \frac{d\Phi}{dn}.$$

Nosotros podremos definir un coeficiente k tal que

$$(29) \dots \Phi = - k \frac{dn}{d\chi}.$$

Este coeficiente podrá ser constante o depender de varios factores, pero lo supondremos finito siempre, lo que equivale a que

$$(30) \dots \Phi = 0 \quad \text{cuando} \quad \frac{d\chi}{dn} = 0.$$

Las (28) y (29) nos dan

$$(31) \dots \frac{d(\rho\chi dh)}{d\theta} = dh \frac{d}{dn} \left(k \frac{d\chi}{dn} \right).$$

Y puesto que las derivadas se refieren a desplazamientos si-

guiendo el movimiento medio y por éste la masa *total* de aire no varía

$$\frac{d(\rho dh)}{d\theta} = 0$$

con lo que la (31) da

$$(32) \dots \frac{d\chi}{d\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dn} \left(k \frac{d\chi}{dn} \right)$$

que es la ecuación fundamental de la turbulencia atmosférica.

Magnitudes físicas a que puede aplicarse la ecuación fundamental de la turbulencia

Tratemos ahora de dilucidar qué magnitudes físicas pueden ser representadas por G o χ en la ecuación (32).

La cantidad total de vapor de agua contenida en una porción de aire no se alterará por la simple mezcla de sus partes siempre que no haya condensación. Así que si la condensación no existe, el vapor de agua cumple con la condición impuesta a G cuando la definíamos, G podría, pues, designar al vapor de agua y, por tanto, χ la masa de vapor contenida en la unidad de masa de atmósfera si se cumpliese también para tal factor atmosférico la condición expresada por (30). Pero si $\frac{d\chi}{dn} = 0$, ello quiere decir que la

masa de vapor por unidad de masa de atmósfera no varía al desplazarse verticalmente la capa de aire que venimos considerando. Tampoco varía, por tanto, la cantidad total de vapor, es decir, la G , en esa capa cuando ella asciende y, por consiguiente, es nulo el flujo turbillonario ascendente de G , tal como éste ha sido definido.

Otra magnitud física que puede ser representada por G , es la *temperatura potencial* media de la capa aérea considerada.

La temperatura absoluta que una masa de aire cuya temperatura actual es T y su presión P tomaría al ser llevada adiabáticamente a una presión tipo P_0 (suele tomarse $P_0 = 1000$ milibares) recibe, como es sabido, el nombre de temperatura potencial.

Nosotros vamos a probar que G o χ en la ecuación (32), puede representar la temperatura potencial media y en cambio no podría representar la entropía de la capa de aire que supusimos se desplazaba con el «movimiento medio».

Para ello establezcamos la relación entre entropía y temperatura potencial de una masa de aire, cuyo volumen es v , su presión P y su temperatura absoluta T . Si suponemos al aire gas perfecto, de su ecuación $P \cdot v = RT$ y la isoentrópica

$$Pv^\gamma = \text{constante}, \quad \text{siendo} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

como sabemos, el cociente de los calores específicos a presión y a volumen constante, deducimos inmediatamente

$$\frac{PT^\gamma}{P^\gamma} = \text{constante}$$

de donde

$$(33) \dots \frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{\tau}{P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

y, por tanto,

$$(34) \dots \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP}{P}$$

Pero la variación de entropía, dS , de un gas perfecto, tiene por expresión (22)

$$(35) \dots dS = c_v \left[\frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dv}{v} \right] = c_p \left[\frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP}{P} \right]$$

que teniendo en cuenta la (34) nos da

$$dS = c_p \frac{d\tau}{\tau}$$

e integrando tenemos, finalmente,

$$(36) \dots = c_p \ln \tau + \text{constante}$$

donde vemos que la entropía de una masa de aire es proporcional al logaritmo de su temperatura potencial.

Para probar ahora que C puede significar la temperatura potencial media de la capa de aire móvil, consideremos para mayor sencillez dos porciones de igual masa de esa capa de aire, cuyas porciones tienden a mezclarse por difusión. Ambas están sometidas a la misma presión, la P correspondiente a la posición de la capa en cada instante. Si sus temperaturas absolutas y potenciales son, antes de la mezcla, T_1 y T_2 y τ_1 y τ_2 tendremos, según (33)

$$\tau_1 = T_1 \left(\frac{P_0}{P} \right)^{0,288} \quad \tau_2 = T_2 \left(\frac{P_0}{P} \right)^{0,288}$$

haciendo (23)

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = 0,2884.$$

Al mezclarse las dos masas sin pérdida ni ganancia de calor (quedan, pues, como en el caso del vapor de agua, excluidas la condensación y precipitación), la temperatura final será $\frac{T_1 + T_2}{2}$, y, por tanto, la temperatura potencial media de la mezcla será

$$\tau = \frac{T_1 + T_2}{2} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{0,2884} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

que es la media de las dos masas antes de mezclarse.

La entropía, en cambio, no goza de esta propiedad, que es la primera condición que imponíamos a la magnitud G cuando establecíamos (32), pues la entropía de la mezcla será (36)

$$S = c_p l \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \text{constante}$$

distinta de la entropía total de las dos masas, antes de mezclarse, que es

$$S_1 + S_2 = c_p [l\tau_1 + l\tau_2] + \text{constante}$$

Además, la temperatura potencial satisface también a las (30), pues si x que ahora representará la temperatura potencial de la unidad de masa de atmósfera, es constante al ascender la capa aérea, también será constante, en virtud de lo que acabamos de decir, la temperatura potencial media del total de la capa aérea.

y por tanto el flujo turbillonario ascendente de temperatura potencial será nulo, dada su definición.

La ecuación (32) es, pues, también válida en la atmósfera turbulenta cuando χ representa la temperatura potencial de la unidad de masa de esa atmósfera.

Otra significación posible de G y χ es, respectivamente, la *cantidad total de movimiento horizontal* de la capa de aire y la componente horizontal de la velocidad media de la unidad de masa de atmósfera. Las mezclas entre las diversas partes de la masa aérea, debidas a fuerzas internas, no alterarán la cantidad total de movimiento horizontal del conjunto y la detención en la marcha ascensional de la capa, debida a fuerzas verticales, no influirá tampoco, por tanto, en esa cantidad total de movimiento horizontal. Además, como χ decimos que representará ahora la velocidad media w por unidad de masa, si $\frac{dw}{dn}$ es nulo en un cierto nivel, no podrá haber en él líneas de corriente turbillonaria allí donde no hay gradiente de velocidad media, siendo por tanto nulo el flujo turbillonario ascendente.

Coefficiente de la transmisión turbillonaria

La ecuación (32) vemos, pues, que representa la transmisión turbillonaria de agua, de temperatura potencial o de velocidad horizontal en la baja atmósfera y a cada una de estas magnitudes corresponderá un coeficiente que, si en lo que sigue nos limitamos a una capa de atmósfera de pequeño espesor para poder suponer a k independiente de la altura, permitirá reducir la ecuación a la forma de la de conducción lineal del calor en un sólido, pues siendo k independiente de n será

$$(37) \dots \frac{d\chi}{d\theta} = \frac{k}{\rho} \frac{d^2\chi}{dn^2}.$$

Puesto que nos suponemos a alturas pequeñas de la atmósfera, también podemos suponer a ρ como constante y la anterior ecuación toma la forma

$$(38) \dots \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{k}{\rho} \frac{d^2\mu}{dn^2}$$

siendo $\mu = \rho\chi$, la cantidad de G por unidad de volumen de atmósfera.

El coeficiente $\frac{k}{\rho}$ cuando χ o μ representan temperatura potencial, tiene un papel semejante al de la conductividad del calor en un sólido, lo representaremos por k_c y lo llamaremos con Taylor, *conductividad turbillonaria*.

Si χ o μ representan masa de agua, entonces a $\frac{k}{\rho}$ le representaremos por k_d y por analogía con el coeficiente de difusión molecular le llamaremos *coeficiente de difusión turbillonaria*.

Finalmente, cuando α representa velocidad u según una dirección horizontal, la ecuación (37) es

$$\rho \frac{du}{d\theta} = k \frac{du^2}{dn^2}$$

lo que nos dice que en virtud de la turbulencia aparece en el movimiento de una masa de aire sobre la tierra, una fuerza

$$k \frac{d^2u}{dn^2}.$$

Cuando el movimiento sea estable, esta fuerza habrá de ser equilibrada por la resultante de las proyecciones según la dirección horizontal considerada de las otras dos fuerzas que la dinámica señala como actuantes en los movimientos aéreos, la debida al gradiente de presión y la fuerza desviante originada por la rotación de la Tierra. Aquella fuerza $k \frac{d^2u}{dn^2}$ puede, pues, ser considerada como una fuerza de rozamiento interno y k es así el *coeficiente de viscosidad turbillonaria* que designamos por K_v .

Llegamos, por consiguiente, en el estudio del movimiento turbulento de las bajas capas atmosféricas al establecimiento de tres coeficientes K_c , K_a y K_v , que corresponden a los tres ya mencionados B , D y η establecidos por la teoría cinética para los movimientos moleculares.

Pero así como estos últimos el cálculo y la observación demuestran, como vimos, que son muy diferentes unos de otros, en el caso de los turbulentos las observaciones indican que son del mismo orden de magnitud los tres.

Valores obtenidos en los coeficientes de transmisión turbillonaria

Los valores que se han obtenido de estos coeficientes presentan el inconveniente de que siendo la turbulencia dependiente de las condiciones de lugar y estado del tiempo, no han sido en general determinados simultáneamente y en el mismo sitio los tres coeficientes. Sin embargo, damos a continuación algunos datos referentes a la Torre Eiffel, aun no existiendo para la época en que fueron determinados la precisa concordancia.

Para K_d , W. Schmit (24) obtuvo para París, mediante diferencias de contenido de agua por masa de aire, en alturas entre dos y trescientos dos metros, los valores medios

$4'7.10^4$	U. C. G. S.	de 9 a 12 horas	de Diciembre a Febrero.
$1'6.10^4$	»	de 21 a 24	» de ídem a ídem.
$6'5.10^4$	»	de 3 a 6	» en Julio.
$4'6.10^4$	»	de 21 a 24	» en ídem.

Para K_c obtuvo Taylor (25), mediante observaciones, de temperatura, entre 18 y 302 metros de la Torre Eiffel, los valores medios:

$4'2.10^4$	U. C. G. S.	para Enero.
$1'7.10^5$	»	para Junio.

Para $\frac{K_b}{\rho}$ mediante observaciones, también en la Torre Eiffel, de la variación del viento con la altura (de 21 a 304 metros) obtuvo F. Akerblom (26)

$6'5.10^4$	U. C. G. S.	para el invierno.
$9'2.10^4$	»	para el verano.

Los datos anteriores muestran evidentemente el hecho, que ya hemos mencionado y que puede ser importantísimo para posibles aplicaciones a una fórmula práctica para el cálculo de la masa evaporada en una superficie de agua expuesta al aire libre, de que mientras los tres coeficientes moleculares se diferenciaban grandemente, los turbulentos son en cambio de un mismo orden de magnitud.

En realidad, para los de difusión del vapor y de conducción vertical del calor en la atmósfera turbulenta hay razones para poder admitirlos como iguales, pues tanto el calor como el vapor de

agua son transportados a la vez de unas a otras regiones atmosféricas por un mismo torbellino.

En cuanto a la cantidad de movimiento horizontal, aun cuando Rayleigh advirtió que no hay razón teórica para sustentar una gran relación entre su transmisión y la del calor, la igualdad en el orden de magnitud que las observaciones han revelado, llevó a Taylor (27) a suponer que «las variaciones locales de presión que se produzcan en un torbellino no ejercen influencia sobre la *velocidad media* de transmisión de la cantidad de movimiento», pudiendo explicar así la «igual capacidad del movimiento turbulento para difundir calor, vapor de agua y cantidad de movimiento».

Nueva fórmula para el cálculo de la masa evaporada en la atmósfera libre

Supongamos ahora una extensa superficie de agua expuesta al aire libre. Si sobre ella consideramos una lámina de aire limitada entre dos planos horizontales fijos en el espacio, distantes entre sí dn , en virtud del movimiento turbulento de la baja atmósfera, la lámina será a cada momento atravesada en sentido vertical por una masa de aire que transporta consigo una cierta masa de vapor de agua.

Si llamamos w a la *velocidad media* vertical del aire, a ella corresponderá un valor también medio para la masa de agua arrasada por la unidad de volumen de aire. Sea ρ_1 esa densidad media del vapor de agua en la cara inferior de la lámina, entonces $\rho_1 w$ será la masa media de vapor que atraviesa por segundo la unidad de superficie de esa cara inferior, y la masa media que atravesará por segundo la unidad de superficie del plano superior será

$$\rho_1 w + \frac{d(\rho_1 w)}{dn} dn$$

si despreciamos la difusión colateral.

El incremento de masa de vapor de agua, por segundo, en el volumen de lámina de base unidad, será, pues,

$$\frac{d(\rho_1 w)}{dn} dn.$$

Como por otra parte la masa de vapor contenida en ese volumen de base unidad y altura dn es $\rho_1 dn$, aquel incremento puede también expresarse en la forma

$$\frac{d\rho_1}{d\theta} \frac{dn}{dn}$$

con lo que igualando las dos expresiones y simplificando, obtendremos la

$$(39)\dots \frac{d\rho_1}{d\theta} + \frac{d(\rho_1 w)}{dn} = 0.$$

Por otra parte, para la variación por turbulencia de esa masa media de vapor por unidad de volumen tenemos la ecuación (38) en la que dando a μ su valor actual, ρ_1 , será

$$(40)\dots \frac{d\rho_1}{d\theta} = K_d \frac{d^2\rho_1}{dn^2}$$

donde $K_d = \frac{k}{\rho}$, es el coeficiente de difusión turbillonaria del vapor de agua en la atmósfera.

De las ecuaciones (39) y (40) se obtiene

$$(41)\dots K_d \frac{d^2\rho_1}{dn^2} = - \frac{d(\rho_1 w)}{dn}$$

que integrada tras multiplicar por dn ambos miembros, nos da

$$(42)\dots K_d \frac{d\rho_1}{dn} = - \rho_1 w + \text{constante.}$$

Para hallar el valor de la constante de integración, consideremos el caso límite de aire encalmado. En tal caso, K_d será el valor del coeficiente D de difusión molecular del vapor de agua en el aire, $\rho_1 w$ será el valor M_0 de la masa de vapor que atraviesa la unidad de superficie plana con aire en reposo y, por tanto,

$$\text{constante} = M_0 + D \frac{d\rho_1}{dn}.$$

Con lo que de la (42) se obtiene

$$(43)\dots \rho_1 w = M_0 + [D - K_d] \frac{d\rho_1}{dn}.$$

Si nos limitamos a una capa de aire sobre la superficie de agua, de espesor h pequeño, para que podamos hacer en ella

$$\frac{d\rho_1}{dn} = \frac{\rho_1 - \rho'_1}{h}$$

siendo ρ'_1 y ρ_1 respectivamente, las densidades medias del vapor en la superficie de aire en contacto con la líquida y en el plano horizontal de altura h sobre esa superficie, entonces, teniendo en cuenta que si la superficie es bastante extensa para que en la capa de aire de espesor h podamos desprestigiar la difusión colateral y también, por tanto, el efecto perturbador de los bordes, $\rho_1 w$ no es sino la masa media M que atraviesa en un segundo la unidad de superficie de una porción de plano horizontal cualquiera en esa capa de aire, tendremos para M la fórmula

$$M = M_0 + [K_d - D] \frac{\rho'_1 - \rho_1}{h}.$$

Además, como podemos suponer que la superficie aérea en contacto con la líquida está siempre saturada de vapor con la tensión máxima correspondiente a la temperatura de la superficie del agua, si p' y T' son tales tensión y temperatura absoluta media, tendremos

$$\rho'_1 = d_1 \frac{T_0}{T'} \frac{p'}{P_0}$$

siendo d_1 la densidad del vapor de agua a $T_0=273$ y $P_0=760$ mm.

También para ρ_1 si T y p son la temperatura absoluta y tensión del vapor medias en el plano de cota h sobre la superficie de agua, se tendrá

$$\rho_1 = d_1 \frac{T_0}{T} \frac{p}{P_0}.$$

Sustituyendo estos valores de ρ_1 ρ'_1 en la fórmula (44) tomará la forma

$$(45)..... M = M_0 + \frac{K_d - D}{h} \frac{T_0 d_1}{P_0} \left[\frac{p'}{T'} - \frac{p}{T} \right].$$

Para M_0 obtuvimos ya (24) como consecuencia de la difusión molecular del vapor de agua en aire encalmado el valor

$$M_0 = \frac{P_0}{Cd_2} \frac{T}{T_0} \frac{1}{h} \frac{p' - p}{P - p'}$$

siendo d_2 la densidad normal del aire seco y T y P la temperatura y presión medias de la capa de aire considerada.

Como el valor del coeficiente de difusión molecular decíamos era

$$D = \frac{1}{C} \frac{P_0^2}{d_1 d_2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \frac{1}{P}$$

la anterior expresión de M_0 se puede transformar en

$$M_0 = D \frac{d_1}{h} \frac{T_0}{P_0} \frac{P}{T} \frac{p' - p}{P - p'}$$

con lo que tendremos

$$(46) \dots M = \frac{1}{h} \left[D d_1 \frac{T_0}{P_0} \frac{P}{T} \frac{p' - p}{P - p'} + (K_d - D) \frac{T_0 d_1}{P_0} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p}{T} \right) \right].$$

Si la tensión del vapor y la presión atmosférica las expresamos en milímetros de mercurio tendremos, puesto que $d_1 = 0,0008046$.

$$\frac{d_1 T_0}{P_0} = 0,0000289$$

y tomando para D el valor a 16° obtenido por Summerhays, 0,282 tendríamos a esa temperatura

$$D \frac{d_1 T_0}{P_0} = 0,0000815.$$

Como $\frac{P}{P - p'}$ es muy próximo a la unidad y $\frac{p' - p}{T}$ es siempre bastante menor que ella vemos que el primer sumando del segundo miembro de la fórmula (46) es despreciable, pues el valor correctivo debido a él es muy inferior al límite de precisión en las medidas de evaporación que no pasa de la décima de milímetro de espesor de la capa evaporada, o sea la centésima de gramo por centímetro cuadrado de superficie si tomamos la unidad como valor constante de la densidad del agua.

Además K_d es de un orden de magnitud, según los valores citados anteriormente, de unos 10⁶ veces el de D por lo que en el segundo sumando también podremos despreciar D en presencia de K_d quedándonos finalmente

$$(47) \dots M = 0,000289 \frac{K_d}{h} \left[\frac{p'}{T'} - \frac{p}{T} \right]$$

para la masa media en gramos que se evapora por cm.² y por segundo en una extensa superficie de agua expuesta al aire libre,

viniendo expresadas en mm. las p' y p tensiones máximas del vapor de agua a la temperatura media de la superficie evaporante y tensión media del vapor a una altura h sobre esa superficie, T es la temperatura absoluta media a esa altura y K_d el coeficiente de difusión turbilhonaria.

Determinación del coeficiente de la fórmula

Esta fórmula teórica ha sido deducida teniendo en cuenta las circunstancias reales a que está sometida la evaporación del agua en la naturaleza en oposición a la de Stefan, que por considerar un caso especial de la evaporación, planteado para evitar las dificultades matemáticas que se presentan en general, no podía aplicarse a la evaporación en atmósfera libre sin introducir en ella términos correctivos conteniendo constantes de naturaleza empírica.

El efecto del viento está incluido en nuestra fórmula en el coeficiente K_d . Este coeficiente no sólo es distinto, aun en sus valores medios, de unas a otras épocas del año, como se aprecia en los valores del mismo que en otro lugar hemos consignado, sino que depende de las condiciones locales respecto a la turbulencia. Para una misma superficie de agua sus valores medios serán muy diferentes en llano y en zona montañosa, en la que los movimientos turbulentos son grandemente intensificados y aun en este caso variará a igualdad de otras condiciones con la dirección del viento dominante respecto al eje del valle en cuyo fondo exista el embalse.

Si poseyésemos un método práctico de determinar su valor en el lugar del embalse, nuestra fórmula habría resuelto el importante problema de la medida de las cantidades de agua evaporadas en lagos y pantanos. Sin embargo no existe tal método de práctica.

Pero si admitimos con Taylor la igualdad de los coeficientes de difusión y de conductividad turbilhonaria, entonces nuestra fórmula sería también

$$(48)..... \quad M = \frac{0,000289}{h} K_c \left[\frac{p'}{T'} - \frac{p}{T} \right]$$

y nos desaparecería la dificultad anterior, ya que el coeficiente lo podemos determinar fácilmente en cada caso según vamos a demostrar.

En la fórmula (37) vimos efectivamente que χ podía representar a la temperatura potencial media. Por tanto, si ésta la designamos por τ tendremos la ecuación

$$(49)..... \frac{d\tau}{d\theta} = K_c \frac{d^2\tau}{dn^2}$$

análoga a la ecuación de propagación lineal del calor en un sólido salvo que en este último caso figuraría en ella la temperatura ordinaria en vez de la potencial.

Además τ en las capas inmediatas al suelo, debido a la ley de calentamiento diario de la superficie terrestre en nuestras latitudes, tiene para su marcha diaria media una forma sinusoidal y por otra parte τ aumenta con la altura.

Las condiciones a que estará sometida la temperatura potencial en nuestro problema de la conductividad vertical turbilionaria del calor en la atmósfera serán, pues, el satisfacer a (49) y a las

$$(50)..... \begin{cases} \tau = C \operatorname{sen} m\theta & \text{para } n = 0. \\ \tau \cdot > \tau & n = h \quad n = 0 \end{cases}$$

Una expresión de tipo

$$\tau = Ae^{\pm \alpha \theta \pm \beta n}$$

satisface evidentemente a la ecuación (49) si A , α y β son constantes y además $\alpha = K_c \beta^2$. Hagamos $\alpha = \pm i\varphi$, donde i es la unidad imaginaria. Entonces como

$$(1 + i)^2 = 2i \quad \gg \quad (1 - i)^2 = -2i$$

o lo que es igual

$$\sqrt{-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \gg \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

la expresión anterior nos da

$$(51) \quad \tau = Ae^{\pm i\varphi\theta \pm \sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}}(1+i)n} = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}}n \pm i\left(\varphi\theta \pm \sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}}n\right)}$$

Para que las soluciones encerradas en esta fórmula y que satisfacen a la (49) verifiquen también la segunda condición (50) es necesario que el signo que precede a los radicales sea siempre el más, es decir, que (51) ha de ser

$$\tau = Ae^{+\sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}}n \pm i\left(\varphi\theta + \sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}}n\right)}$$

por lo que siendo A_1 y A_2 constantes podríamos poner como solución más general de (49) que verifica a la segunda de las condiciones (50) la

$$\tau = e^{+\sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}} n} \left[A_1 e^{i\left(\varphi\theta + \sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}} n\right)} + A_2 e^{-i\left(\varphi\theta + \sqrt{\frac{\varphi}{2K_c}} n\right)} \right].$$

Para que además verifique la condición para $n=0$ dada por la (50), es necesario que

$$A_1 = -A_2 = \frac{C}{2i} \quad \text{y} \quad \varphi = m$$

con lo que tenemos para solución final

$$(52) \dots \quad \tau = C e^{+\sqrt{\frac{m}{2K_c}} n} \operatorname{sen} \left(m\theta + \sqrt{\frac{m}{2K_c}} n \right).$$

Si llamamos Δ al período (un día) con lo que $m = \frac{2\pi}{\Delta}$ y si hacemos $b^2 = \frac{\pi}{\Delta K_c}$ tendremos

$$(53) \dots \quad \tau = C e^{+bn} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{h}{\Delta} + bn \right)$$

siendo, por tanto, la oscilación máxima diaria de τ en la capa de altura $n=h$ sobre la superficie de agua

$$(54) \dots \quad \tau_M - \tau_m = 2 C e^{+bh}$$

donde τ_M y τ_m son las temperaturas potencial máxima y mínima durante el día en esa capa de aire.

Esta ecuación nos permitirá hallar el valor de b , ya que C se puede también fácilmente determinar, pues si τ'_M y τ'_m son las temperaturas máxima y mínima diarias correspondientes a la capa de aire en contacto con el agua, $h=0$, tendremos

$$\tau'_M - \tau'_m = 2C$$

de donde sustituyendo en (54)

$$e^{+bh} = \frac{\tau_M - \tau_m}{\tau'_M - \tau'_m}$$

y, por tanto,

$$b = \frac{1}{h} \ln \frac{\tau_M - \tau_m}{\tau'_M - \tau'_m}$$

quedándonos finalmente para valor medio diario de K_c ,

$$(55) \dots K_c = \frac{\pi}{\Delta b} = \frac{\pi}{\Delta} \frac{h}{|\ln \delta - \ln \delta'|}$$

llamando δ' y δ a las oscilaciones diarias máximas de la temperatura potencial del aire a la altura h y en la superficie del agua. Naturalmente, en los días en que no se cumpliera la segunda condición (50) sino que la temperatura potencial disminuyese con la altura el coeficiente b sería de signo contrario y de aquí que hayamos puesto en (55) el valor absoluto del logaritmo del cociente de δ y δ' .

Fórmula final para el cálculo de la masa evaporada en un día

En la fórmula (48) dijimos que M representaba la masa en gramos evaporada por cm^2 y por segundo. Si sustituimos en ella el valor (55) de K_c y multiplicamos el segundo miembro por el período Δ segundos (un día), tendremos para masa en gramos M_d que se evapora por cm^2 de superficie en un día

$$M_d = \frac{0,0009}{\left| \ln \frac{\delta}{\delta'} \right|} \left[\frac{p'}{T'} - \frac{p}{T} \right]$$

o, finalmente, pasando de los logaritmos neperianos a los vulgares

$$(56) \dots M_d = 0,00039 \frac{1}{\left| \log \frac{\delta}{\delta'} \right|} \left[\frac{p'}{T'} - \frac{p}{T} \right]$$

donde T' y T son las temperaturas absolutas diarias medias de la superficie del agua y del aire a una altura cualquiera h sobre ella.

p' es la tensión máxima del vapor, expresada en mm., a la temperatura T' y p es la tensión diaria media del vapor de agua, también en mm., en el aire a la altura h y, finalmente, δ' y δ son las oscilaciones máximas en el día de las temperaturas potenciales correspondientes a la superficie de contacto y a la altura h sobre ella.

La determinación de la temperatura potencial en cada momento y, por tanto, de δ y δ' no ofrece, como se sabe, dificultad alguna, pues de (34) se tiene

$$\log \tau = \log T - \frac{\gamma - 1}{\gamma} [\log P - \log P_0]$$

y si como presión P_0 adoptamos, como en las publicaciones internacionales de Meteorología, la de 1000 milibares (750 milímetros), si P se expresa también en milibares y si para $\frac{\gamma - 1}{\gamma}$, que varía débilmente con el valor del contenido de aire en vapor, pero cuyas variaciones sólo afectan a la cuarta cifra decimal (28), tomamos el valor 0,288, tendremos

$$(57)..... \log \tau = \log T - 0,288 \log P + 0,864$$

que permite calcular con facilidad la temperatura potencial, sin más que conocer la temperatura absoluta T y la presión atmosférica P expresada en milibares.

Conclusión

La fórmula (56) permite ser aplicada, pues, con facilidad a la determinación de la masa media diaria de agua evaporada en los grandes embalses. Con aspirópsicrómetros colocados a metro o metro y medio sobre el líquido, obtendremos los valores de p y T necesarios para su cálculo. Dado el pequeño espesor de la capa de aire que consideramos, no necesitaremos hacer determinaciones de la presión atmosférica P en sus dos alturas límites, sino que prácticamente podemos tomar siempre para P su valor a una altura intermedia. Nos bastará, pues, con simples lecturas de barómetro y de la temperatura T' de la superficie simultaneadas con las del aspirópsicrómetro para obtener cuantos datos se precisan para el cálculo de la fórmula, en la que no existen constantes de carácter empírico que, como hemos señalado oportunamente, tanto dificultan y aun imposibilitan la aplicación de otras fórmulas que se han tratado de aplicar al problema de la evaporación de las grandes masas de agua

en la libre atmósfera, e incluso la más reciente obtenida por Sutton ⁽²⁹⁾ basándose también en consideraciones sobre la turbulencia atmosférica:

$$M = A u_h^{\frac{2-n}{2+n}} a^{\frac{2}{2+n}} x_0^{\frac{2}{2+n}} y_0$$

en donde A es una constante de integración que habrá de determinarse empíricamente; u_h velocidad media del viento horizontal a la altura h ; x_0 anchura de la superficie de evaporación en la dirección del viento; y_0 , esa anchura en la dirección perpendicular a la del viento; a variable dependiente tan sólo de las propiedades físicas del aire pero que no depende de u ; finalmente n es el índice del grado de turbulencia del aire que figura en la ley potencial para la variación de la velocidad del viento con la altura z

$$\frac{u}{u'} = \left(\frac{z}{z'} \right)^{\frac{n}{2-n}}$$

y cuyo valor experimental oscila ⁽³⁰⁾, en promedio entre los límites 0,22 y 0'50.

Barcelona, Junio de 1938.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) CHWOLSON.—*Traité de Physique*, tomo III, pág. 679. París, 1910.
- (2) OLLIVIER.—*Physique générale*, tomo II, pág. 105. París, 1913.
- (3) F. J. H. WHIPPLE.—*Formulae for the vapour pressure of ice and of water below 0° C.*—«Monthly Weather Review», vol. 55, pág. 320. Julio 1927.
- (4) S. C. BRADFORD.—*Contribution to Kinetic Theory of Vaporization.*—«Philosophical Magazine», vol. 10, núm. 62, págs. 160-165. Julio 1930.
- (5) *Smithsonian Meteorological Tables.*—Fourth edition, 1918.
- (6) F. H. BIGELOW.—*The progress of the research in 1908, and the proposed campaign for the years 1909 and 1910.*—«Monthly Weather Review», Annual Summary, 1908, pág. 437-445.
- (7) F. H. BIGELOW.—*Studies on the phenomena of the evaporation of water over lakes and reservoirs.*—«Monthly Weather Review». Julio 1907.
- (8) F. H. BIGELOW.—*Las leyes de la evaporación del agua de fuentes, depósitos y lagunas, arenas y plantas.*—«Boletines de la Oficina Meteorológica Argentina», núm. 2, 1912.
- (9) W. KNOCH.—*Eine Methode zu angenäherten Berechnung der Verdunstung.*—«Meteorologische Zeitschrift», págs. 14-16. Enero 1930.
- (10) Ch. E. LINNEY.—*Ten years of evaporation in the Southwest.*—«Monthly Weather Review», vol. 55, pág. 320. Julio 1927.
- (11) D. SZYMKIEWICZ.—*Etudes climatologiques. V. Commee caracteriser l'humidité d'un climat.*—Acta Societatis Botanicorum Poloniae, vol II, páginas 239, 264. 1924-25.

- (12) D. SZYMKIEWICZ.—*Etudes climatologiques. VI. Sur les rapports entre l'humidité du climat et la vegetation.* Acta Societatis Botanicorum Poloniae, vol. III, número 1, págs. 115-137. 1925.
- (13) M. BOSSOLASCO.—*Condensacione ed evaporacione.*—«La Meteorología Práctica», tomo XI, núm. 3, pág. 149. 1930.
- (14) N. SZWALKOWSKI.—*Einfluss des Windes auf die Verdunstung.*—«Gerlands Beiträge Geophysik», tomo 24, págs. 293-308. 1929.
- (15) D. SZYMKIEWICZ.—*Sur un nouveau procédé pour évaluer l'évaporation.*—«III éme Conférence hydrologique des Etats baltiques». Varsovia. Mayo 1930.
- (16) I. S. BOWEN.—*The ratio of heat losses by conduction and by evaporation from any water surface.*—«Physical Review», vol 27, pág. 779. 1926.
- (17) G. I. TAYLOR.—*On Eddy-Motion in the Atmosphere.*—«Philos. Trans. Roy. Soc.», A. vol. 215, págs. 1-26. 1914.
- (18) N. SHAW.—*Manual of Meteorology*, vol. IV, pág. 55. 1919.
- (19) J. H. JEANS.—*Théorie dynamique des gaz.*—París, 1925, pág. 346.
- (20) W. E. SUMMERHAYS.—*A determination of the coefficient of diffusio of water vapour.*—«The Proceedings of the Physical Society», vol 42, pág. 218. 1930.
- (21) LEWIS F. RICHARDSON.—*Weather Prediction by Numerical Process.* Cambridge, 1922, pág. 67.
- (22) E. ROTHÉ.—*Cours de Physique.*—II éme partie : *Thermodynamique*, página 165. París, 1917.
- (23) FÉLIX M. EXNER.—*Dynamische Meteorologie.*—Wien, 1925, pág. 12.
- (24) W. SCHMIDT.—*Wirkungen des Luftaustausches auf das Klima und den täglichen Gang der Luft temperatur in der Höhe.*—«Akad. Wiss. Wien.», 1918.
- (25) G. I. TAYLOR.—*Phenomena connected with Turbulence in the Lower Atmosphere.*—«Roy. Soc. Lond. Proc.» A. vol. 94. 1917.
- (26) F. AKERBLUM.—*Sur les courants les plus bas de l'atmosphère.*—«Nova Acta Reg. Soc. Upsaliensis», vol. II, núm. 2. 1908.
- (27) G. I. TAYLOR.—*Turbulence.*—«Quarterly Journal of the Roy. Meteorological Society», vol 53, págs. 201-213. Julio, 1927.
- (28) T. N. DOERR.—*Tables of 0,288 th. Powers.*—Introduction by L. F. Richardson. «Quarterly Journal of the Roy Meteorological Society», vol. 47, página 196. 1921.
- (29) O. G. SUTTON.—*Wind structure and evaporation in a turbulent Atmosphere.*—«Proceedings of the Royal Society», A, vol. 146, p. 701, 1934.
- (30) H. LETTAN.—O. G. Sutton, *Theorie der Verdunstung in turbulenter Luft im Vergleich zu neueren Beobachtungen.*—«Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie», vol. 65, págs. 155-160. 1937.



